COMMERCIUM EPISTOLICUM D. JOHANNIS COLLINS, ET ALIORUM, DE ANALYSI PROMOTA,

Juſſu SOCIETATIS REGIÆ in lucem editum:

ET JAM

Unà cum ejuſdem Recenſione præmiſſa, & Judicio primarii, ut ferebatur, Mathematici ſubjuncto, iterum impreſſum.

LONDINI:
Ex Officinâ J. TONSON, & J. WATTS.

M DCC XXII.

AD LECTOREM.

CUM primum Commercium Epistolicum lucem vidit, D. Leibnitius *Viennæ agens, ut librum sine responso dimitteret, prætendit per biennium se eundem non vidisse, sed ad judicium primarii Mathematici & harum rerum peritissimi & a partium studio alieni se provocasse. Et sententiam ejus* 7 Jun. 1713 *datam, schedulæ volanti* 29 Julii *datæ inclusam, per orbem sparsit, sine nomine vel Judicis vel Impressoris vel Urbis in qua impressa fuit. Et sub finem anni* 1715 *in Literis quæ ad Abbatem * de Comitibus tunc* Londini *agentem scripsit, confugit ad Quæstiones novas de Qualitatibus occultis, gravitate universali, Miraculis, Organis & Sensorio Dei, spatio, Tempore, Vacuo, Atomis, Perfectione mundi, & Intelligentia supramundana; & Problema ex Actis Eruditorum desumptum proposuit ab Analystis Anglis solvendum. Quæ omnia ad rem nil spectant.*

* Conti.

Sed & Consessum a Regia Societate constitutum, qui Commercium ex antiquis monumentis ediderant, accusavit quasi partibus studuissent, & Literas antiquas edendo omisissent omnia quæ vel pro ipso vel contra Newtonum *facerent. Et ut hoc probaret, scripsit is in prima sua ad Abbatem epistola, quod in se-*

secundo suo in Angliam itinere, Collinius ostenderit ipsi partem Commercii sui, in qua Newtonus agnoscebat ignorantiam suam in pluribus, dicebatque (inter alia) quod nihil invenisset circa dimensiones Curvilinearum quæ celebrantur præter dimensionem Cissoidis: sed Consessus hoc totum suppressit. Et Newtonus in Epistola sua ad dictum Abbatem 26 Feb. 17$\frac{15}{16}$ data, respondit: Hoc non fuisse omissum, sed extare in Epistola sua ad Oldenburgum 24 Octob. 1676 missa, & impressum fuisse in Commercio Epi-
*Id est pag. 169. l. ult. infra. stolico * pag. 74. lin. 10, 11. Et subinde Leibnitius in proxima sua ad Abbatem illum Epistola Apr. 9, 1719 data, agnovit se errasse. Sed, inquit, exemplum dabo aliud. Newtonus in una Epistolarum ejus ad Collinium agnovit, se non posse invenire magnitudinem sectionum secundarum (vel segmentorum secundorum) sphæroidum & corporum similium: sed Consessus hunc locum vel hanc Epistolam minime edidit. Newtonus autem in Observationibus quas in hanc Leibnitii Epistolam scripsit, respondit: Si Consessus hoc omisisset, recte omnino omissum fuisse, cum hujusmodi cavillationes ad Quæstionem de qua agitur nil spectent: sed Consessum hoc minime omisisse. Collinius in Epistola ad D. Gregorium 24 Decem. 1670, ut & in altera ad D. Bertet 1671, (utrisque impressis in Commercio, † p.
†Id est pag. 97, 100 infra. 24, 26.) scripsit quod Methodus Newtoni se extenderet ad secunda solidorum segmenta quæ per rotationem generantur. Et Oldenburgius idem scripsit ad Leibnitium ipsum 8 Dec. 1674, ut videre est in Commer-
‡Id est pag. 117 infra. cio ‡ pag 39. Leibnitius igitur iterum erravit. Nam & in Transactionibus Philosophicis pro Jan. & Feb. 1718, pag. 925, dicitur quod Abbas de Comitibus per horas aliquot inspexit Epistolas antiquas & Libros Epistolarum in Archivis R. Societatis asservatos, ut aliquid inveniret quod vel pro Leibnitio vel contra Newtonum faceret, & in Commercio Epistolico omissum fuisset; sed ejus generis nihil invenire potuit.

In-

Insuper D. Leibnitius, *ut Commercium Epistolicum sine responso dimitteret, in prima sua ad Abbatem de Comitibus Epistola dixit, eos qui contra ipsum scripsissent (id est Consessum a Regia Societate constitutum) candorem ejus aggressos esse per interpretationes duras & male fundatas, & voluptatem non habituros esse videndi responsa ejus ad pusillas rationes eorum qui iis tam male utuntur. Interpretationes illæ nullius quidem sunt auctoritatis, nisi quam ab Epistolis derivant, sed male fundatas esse* Leibnitius *nunquam ostendit.*

Subinde vero Newtonus, *qui ægre adductus est ut scriberet, in prima sua ad Abbatem Epistola 26 Feb.* $171\frac{5}{6}$ *ita rescripsit.* D. *Leibnitius* hactenus respondere recusavit, bene intelligens impossibile esse res factas refutare. Silentium suum hac in re excusat, prætexens se librum nondum vidisse, & otium illi non esse ad examinandum, sed se orasse Mathematicum celebrem ut hoc negotium in se susciperet. ——— Utitur & novo prætextu ne respondeat, dicens quod Angli voluptatem non habebunt videndi responsa ejus ad pusillas eorum rationes, & proponens disputationes novas Philosophicas ineundas & problemata solvenda: quæ duo ad rem nil spectant. *D.* Leibnitius *autem in proxima sua ad Abbatem Epistola* 9 Apr. 1716 *data pergebat se excusare ne respondeat.* Ut operi, *inquit,* contra me edito sigillatim respondeam, opus erit alio opere non minore quam hoc est; percurrendum erit corpus magnum minutorum ante annos 30 vel 40 præteritorum, quorum perparvum reminiscor; examinandæ erunt veteres Epistolæ, quarum plures sunt perditæ, præterquam quod maxima ex parte non conservavi minuta mearum, & reliquæ sepultæ sunt in maximo chartarum acervo, quem non possum sine tempore & patientia discutere. Sed otium mihi minime suppetit aliis ne-

negotiis alterius prorsus generis occupato. *Et paulo post:* Literas truncare non debuerunt. Nam parvum est inter chartas meas vel cujus minuta mihi relinquuntur. Sic omnibus perpensis, videns tantas malignitatis & fallaciæ notas, credidi indignum esse me ingredi discussionem cum hominum genere qui se tam male gerunt. Sentio quod in iis refutandis difficile fuerit ab opprobriis & expressionibus asperis abstinere, talibus quas eorum facta merentur, & non cupio hujusmodi spectaculum exhibere publico, in animo habens tempus meum melius impendere, quod mihi pretiosum esse debet, & contemnens judicium eorum qui super tali opere sententiam contra me pronunciare vellent; præsertim cum Societas Regia hoc facere noluit. *Hæc* Leibnitius. *Quæstionem primam deserit rixando, & Quæstiones novas proponit.*

Attamen post ejus mortem (quæ contigit proximo Mense Novembris) *in Elogio ejus quod in Actis Eruditorum pro Mense* Julio *Anni* 1717 *impressum fuit, amici ejus scripserunt* eum Commercio Epistolico Anglorum quoddam suum idemque amplius opponere decrevisse: & paucis ante obitum diebus Cl. *Wolfio* significasse se Anglos famam ipsius lacessentes reipsa refutaturum. Quamprimum enim a laboribus historicis vacaturus sit, daturum se aliquid in Analysi prorsus inexpectatum, & cum inventis quæ hactenus in publicum prostant, sive *Newtoni*, sive aliorum, nihil quicquam affine habens. *Hæc illi. Verum ex jam dictis patet illum non aliud habuisse Commercium Epistolicum quod ederet. Et inventum novum his nihil affine habens ad rem nihil spectat. Missis ægrorum somniis, Quæstio tota ad Epistolas antiquas referri debet.*

Initio secundæ ad Abbatem de Comitibus Epistolæ, D. Leibnitius *primam* Newtoni *Epistolam vocavit* speciem chartæ provocatoriæ ex parte *Newtoni,*

ni, dein addidit; In arenam descendere nolui contra ejus milites emissarios, sive intelligas Accusatorem supra fundamentum Commercii Epistolici, sive Praefationem spectes acrimoniae plenam, quam alius quidam novae Principiorum aeditioni praemisit: Sed cum is per se jam lubens apparebit, paratus sum ipsi satisfactionem dare. *Et* Newtonus *respondit*, D. *Leibnitium* literas & chartas antiquas seponere, & ad Quaestiones circa philosophiam & res alias confugere. Et magnum illum Mathematicum, cui sine nomine ut Judici Epistolam 7 *Jun.* 1713 datam attribuerat, jam ut advocatum in hac rixa pro se inducere, mathematicos in Anglia provocantem [*uti fingitur*] ad problemata solvenda; quasi Duellum [*cum* Leibnitio *scilicet*] vel forte praelium cum exercitu discipulorum ejus [*quos jactat*] methodus esset magis idonea ad veritatem dirimendam, quam discussio veterum & authenticorum scriptorum, & Mathesis factis heroicis vice rationum ac demonstrationum abhinc implenda esset. *Hic rationes ac demonstrationes alludunt ad argumenta e scriptis veteribus desumpta, & facta heroica ad contentiones philosophicas & problematicas ad rem nil spectantes, ad quas D.* Leibnitius *a prioribus aufugit.*

Quae novae Principiorum editioni praemissa sunt, Newtonus *non vidit antequam Liber in lucem prodiit. Quae de Quaestionibus Philosophicis disputata sunt D.* Des Maizeaux * *a D.* Leibnitio *& aliis accepit & in lucem edidit. Solutiones Problematum maxima ex parte lucem viderunt in Actis Eruditorum. Haec omnia ad rem nil spectant. Commercii Epistolici exempla tantum pauca impressa*

* Vide Epistolas D. *Leibnitii* ad D. *Des Maizeaux* 21 *Aug.* 1716, & D. *Des Maizeaux* ad Abbatem de Comitibus 21 *Aug.* 1718, in Collectionum Tomo secundo, *pag.* 356, & 362 impressas.

fuerunt,

fuerunt, & ad Mathematicos missa qui de his rebus judicare possent, neque prostant venalia. Ideoque hunc Librum, ut & ejus Recensionem quæ in Transactionibus Philosophicis ac Diario Literario, anno 1715 *(anno & septem vel octo mensibus ante obitum D.* Leibnitii) *impressa fuit, iterum imprimere visum est, ut historia vera ex antiquis monumentis deducta, missis disputationibus quæ ad rem nil spectant, ad posteros perveniat, & sic finis imponatur huic controversiæ. Nam D.* Leibnitius *a Quæstione desciscens emortuus est, & judicium posteris relinquitur.*

Denique Judicium primarii Mathematici subjunctum est, unà cum Notis quibus pateat, eidem in Recensione prædicta, vivente Leibnitio, *responsum esse, & scopum ejus fuisse tantum, ut Commercium Epistolicum sine Responso dimitteretur.*

RECEN-

RECENSIO LIBRI

Qui inſcriptus eſt *Commercium Epiſtolicum Collinii & aliorum de Analyſi Promota*, & publicatus eſt juſſu Regiæ Societatis Londinenſis, circa controverſiam inter Dnum *Leibnitz* & Dnum *Keill*, de primo inventore *Methodi Fluxionum*, ſive, ut nonnulli appellant, *Methodi Differentialis*: Anglice primum Edita in Actis Regiæ Societatis, A. D. 1715. & Gallice eodem anno in Diario Literario Tom. VII. nunc ex Anglico in Latinum verſa.

CUM variæ *Relationes* apud Exteros de Commercio hoc publicatæ ſint, mutilæ omnes & imperfectæ; viſum eſt ut plenior hæc, quæ ſequitur, Recenſio in publicum edatur.

Commercium hoc contextum eſt ex variis Epiſtolis Chartiſque, in Archivis *Regiæ Societatis* repoſitis; quæ ſingulæ hic ſuo ordine ac ſerie collocantur, & vel ex Latinis fideliter tranſcriptæ ſunt, vel ex Anglicis fideliter in Latinum tranſlatæ: numeroſo Conſeſſu a *Regia Societate* deputato, ut & Literæ Originales inſpicerentur, & earum ex-

B em-

emplaria examinarentur. Caeterum haec, de qua agitur, est *Methodus* generalis resolvendi finitas aequationes in infinitas, & applicandi Aequationes illas, tam finitas quam infinitas, ad solutionem Problematum, per methodum *Fluxionum* & *Momentorum*. Primo autem differemus de ea Methodi parte, quae consistit in resolvendo Finitas aequationes in infinitas, & ea ratione quadrando figuras Curvilineas. Per infinitas aequationes intelliguntur illae, quae involvunt Seriem Terminorum convergentium & ad veritatem propius propiusque accedentium *in infinitum*; ita ut postremo a veritate distent minus ulla data quantitate; &, si *in infinitum* continuentur, nullam omnino differentiam relinquant.

Wallisius in *Opere* suo *Arithmetico*, publicato A. D. 1657. Cap. 33. Prop. 68. reduxit fractionem $\frac{A}{1-R}$ per perpetuam Divisionem in seriem $A+AR+AR^2+AR^3+AR^4+$ &c.

Vicecomes *Brounker* quadravit Hyperbolam per hanc seriem $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{7\times 8}+$ &c. hoc est per hanc $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+$ &c. conjungendo singulos binos Terminos in unum. Et haec Quadratura publicata est in Actis Regiae Societatis, mense Aprili 1668.

Paulo post Dominus *Mercator* evulgavit Demonstrationem hujus Quadraturae per Divisionem Domini *Wallisii*; & deinceps haud multo post *Jacobus Gregorius* Geometricam ejusdem Demonstrationem in lucem edidit. Hi Libelli paucis post quam editi sunt mensibus Cantabrigiam missi sunt ad Dominum *Barrovium* per Dominum *Johannem Collins*; & per *Barrovium* traditi *Isaaco Newtono* tunc Cantabrigiae degenti, utpote Collegii S. Trinitatis Socio, (nunc autem *Londini* Equiti Aurato) mense *Junio* 1669. Hac occasione, *Barrovius* vicissim

cissim *Collinio* misit Tractatum *Newtoni*, qui inscribebatur *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*. Is Tractatus in *Commercio Epistolico* agmen ducit, continetque universalem Methodum id in omnibus Figuris faciendi, quod Vicecomes *Brounker* & *Mercator* in sola Hyperbola fecerant. Porro *Mercator* per annos sexdecim adhuc superstes, nihil tentavit aut progressus est ultra solam illam *Hyperbolæ* quadraturam. Illa vero *Newtoni* per *omnes Figuras* progressio satis ostendit, nihil eum in ea re Mercatoris opera aut ope indiguisse. Ne tamen litiget quisquam aut cavilletur; concedit *Newtonus* & *Brounkerum* invenisse, & *Mercatorem* demonstrasse, seriem illam pro *Hyperbola* quadranda, annos prius aliquot quam in publicum ederent; & proinde prius quam *Newtonus* generalem suam Methodum invenisset. Commerc. Epist N° I.

De Tractatu isto qui inscribitur *Analysis* &c. *Newtonus* in Epistola ad *Oldenburgium* missa, dataque 24 *Octob.* 1676, hæc verba habet, quæ sequuntur: '*Eo ipso tempore quo Mercatoris Logarithmotechnia prodiit, communicatum est per amicum D.* Barrow (*tunc* Matheseos *Professorem* Cantab.) *cum D.* Collinio *compendium quoddam harum serierum, in quo significaveram Areas & Longitudines curvarum omnium, & solidorum superficies & contenta ex datis rectis; & vice versa ex his datis Rectas determinari posse; & Methodum indicatam illustraveram diversis seriebus*.' Hujus porro serierum compendii certiores fecit *Collinius Jacobum Gregorium* Scotum, Dominos *Bertet* & *Vernon* apud Gallos, *Alphonsum Borellum* Italum, Dominos *Strode*, *Townsend*, *Oldenburg*, *Dary*, aliosque apud Anglos, variis Epistolis datis Ann. 1669, 1670, 1671 & 1672, ut ipsæ Epistolæ adhuc testantur. Ipse præterea *Oldenburgius* communicavit eandem *Analysin* cum D. *Francisco* Ib. N° LVII. Ib. N° XIV, XIX, XXI, XXII XXIII, XXIV.

 Slusio

Slusio Leodii tum agente, & ex ea aliquot ῥήσεις citavit; literis datis 14 *Sept.* 1669, & in Librum
Ib. Nº XIII. Regiæ Soc. Epistolarem transcriptis. Porro *Colli-*
Ib. Nº XIV. *nius* in Ep. ad *Jac. Gregorium*, 25 Novemb. 1669, sic de Methodo in *Analysi* illa contenta loquitur. ‘ *Barrovius* provinciam suam publice Prælegen-‘ di remisit cuidam nomine *Newtono* Cantabri-‘ giensi; cujus, tamquam Viri acutissimo ingenio ‘ præditi, in Præfatione Prælectionum Opticarum ‘ meminit. Quippe antequam ederetur *Mercatoris* ‘ Logarithmotechnia, eandem Methodum adinve-‘ nerat, eamque ad omnes Curvas generaliter & ad ‘ Circulum diversimode applicarat. Literis vero ad
Ib. Nº XLVII. D. *Davidem Gregorium* datis 11 Aug. 1676. his verbis de ea loquitur: ‘ Paucos post menses quam e-‘ diti sunt hi Libri (viz. *Mercatoris* Logarithmo-‘ technia & Exercitationes Geometricæ *Gregorii*) ‘ missi sunt ad *Barrovium* Cantabrigiæ. Ille autem ‘ responsum dedit, hanc Infinitarum Serierum do-‘ ctrinam a *Newtono* biennium ante excogitatam ‘ fuisse, quam ederetur *Mercatoris* Logarithmo-‘ technia, & generaliter omnibus figuris applica-‘ tam, simulque transmisit D. *Newtoni* opus Ma-‘ nuscriptum. Horum autem Librorum posterior prodiit circa finem anni 1668; *Barrovius* vero
Ib. Nº I. dictum Serierum *Compendium Collinio* misit, Julio insequente, ut ex tribus ejus Epistolis constat.
Ib. Nº XXIV. *Collinius* porro, in literis ad D. *Strode* 26 Julii 1672. sic de eo *Compendio* scribit: ‘ Exemplar e-‘ jus (Logarithmotechniæ) misi *Barrovio* Canta-‘ brigiam, qui quasdam *Newtoni* Chartas extem-‘ plo remisit; e quibus, & aliis quæ prius ab Au-‘ ctore cum *Barrovio* communicatæ fuerant, patet ‘ illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot an-‘ nis antea excogitatam, & modo universali ap-‘ plicatam fuisse. Ita aut ejus ope in quavis fi-‘ gura Curvilinea proposita, quæ una vel pluribus

‘ Pro-

'Proprietatibus definitur, Quadratura vel Area 'dictæ figuræ, accurata si possibile sit, sin minus 'infinite vero propinqua; Evolutio vel Longitu-'do lineæ Curvæ, centrum gravitatis figuræ, so-'lida ejus rotatione genita & earum superficies, 'sine ulla Radicum Extractione obtineri queant. 'Postquam intellexerat D. *Gregorius* hane metho-'dum a D. *Mercatore* in Logarithmotechnia usur-'patam, & Hyperbolæ quadrandæ adhibitam, 'quamque adauxerat ipsa *Gregorius*, jam univer-'salem redditam esse, omnibusque figuris appli-'catam, acri studio eandem acquisivit, multum-'que in ea enodanda desudavit. Uterque D. *New-'tonus* & *Gregorius* in animo habent hanc metho-'dum exornare: D. *Gregorius* autem D. *Newto-'num* primum ejus Inventorem anticipare haud in-'tegrum ducit.' In alia vero Epist. ad *Oldenbur-gium* scripta & cum D. *Leibnitio* communican- Ib. Nº XLV.
da, dataque 14 *Jun.* 1676, hæc memorat *Colli-nius*: 'Hujus autem Methodi ea est præstantia; 'ut, cum tam late pateat, ad nullam hæreat dif-'ficultatem. *Gregorium* autem aliosque in ea fu-'isse opinione arbitror, ut quicquid uspiam an-'tea de hac re innotuit, quasi dubia diluculi lux 'fuit, si cum meridiana claritate conferatur.'

Porro hic *Newtoni* Tractatus primum typis edi- A. C. 1710.
tus est a D. *Gulielmo Jones*, qui Apographum ejus repperit in scriniis *Collinii*, ipsius manu scriptum; & postea cum Originali contulit a D. *Newtono* mutuato. Continet autem prædictam generalem Methodum *Analyseos*, monstrantem quomodo resolvendæ sunt finitæ Æquationes in infinitas; utque per Methodum Momentorum applicandæ sunt Æquationes tam finitæ quam infinitæ ad omnium Problematum solutionem. Incipit vero, ubi finem fecit *Wallisius*, & methodum Quadraturarum super tres Regulas struit.

Wallisius Anno 1655, *Arithmeticam* suam *Infinitorum* in lucem dedit; per cujus libri Propositionem LIX. si Abscissa cujusvis Curvilinearis figuræ vocetur X, & *n* atque *m* sint Numeri, &

Ib. N° II. Ordinatæ ad rectos angulos erectæ sint $X^{\frac{m}{n}}$; Area figuræ erit $\frac{n}{m+n} X^{\frac{m+n}{n}}$. Atque hoc assumitur a D. *Newtono*, tamquam prima Regula, super quam fundat suam curvarum Quadraturam. *Wallisius* autem propositionem hanc demonstravit gradatim, per multas particulares propositiones; tandemque omnes in unam collegit per Tabulam Casuum. *Newtonus* vero omnes casus in unum reduxit, per Dignitatem cum indefinito Indice: & sub extremo *Compendii*, semel simulque demonstravit per Methodum suam Momentorum; primusque indefinitos dignitatum Indices in Operationes Analyseos introduxit.

Ceterum per 108 Propositionem *Arithmeticæ Infinitorum* Wallisii, perque plures alias propositiones quæ sequuntur; Si ordinata composita fuerit ex duabus vel pluribus ordinatis cum signis suis + & — acceptis; Area composita erit ex duabus vel pluribus areis cum signis suis + & — acceptis

Ib. N° III. respective. Atque hoc a D. *Newtono* assumitur, tamquam Regula secunda, super quam instituit suam Quadraturarum methodum.

Ib. N° IV. Tertia vero Regula est, ut reducantur Fractiones & Radicales, & affectæ Radices Æquationum in Series Convergentes, cum Quadratura non aliter succedat: & ut per Regulas primam ac secundam quadrentur figuræ, quarum Ordinatæ sunt singuli Termini Serierum. *Newtonus*, in Ep. ad

Ib. N° XLVIII. *Oldenburgium* scripta 13 *Jun.* 1676. & *Leibnitio* transmissa, modum docuit reducendi quamlibet dignitatem cujuslibet Binominalis in Seriem Convergentem; & per eam seriem quadrandi curvam, cujus

or-

ordinata est illa Dignitas. Et a D. *Leibnitio* rogatus, ut fontem hujus Theorematis explicare vellet, rescripsit per Epistolam datam 24 *Octob.* 1676; se paulo ante Pestem, quæ Londini grassabatur anno 1665, cum legeret Arithmeticam infinitorum *Wallisii*, cogitaretque de interpolanda serie x, $x - \frac{1}{3}x^3$, $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$, $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$, &c. invenisse Aream Circuli esse $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ — &c. & persequendo methodum interpolationis, se prædictum Theorema excogitasse; atque ejus ope Reductionem Fractionum & surdarum in series convergentes, per Divisionem & Radicum Extractionem invenisse; ac tum ad Affectarum Radicum Extractionem perrexisse. Atque hæ Reductiones Regula sunt Tertia. Ib. N° LV. Ib. N° IV.

Cum in hoc serierum Compendio trinas has Regulas explicuisset *Newtonus*, variisque exemplis eas illustrasset; designavit is Ideam deducendi Aream ex Ordinata, considerando Aream tanquam Quantitatem nascentem & augescentem sive crescentem per fluxionem continuam, in proportione Longitudinis Ordinatæ, & supponendo Abscissam uniformiter crescere in proportione ad Tempus. Atque ex Momentis Temporis, nomen *Momentorum* indidit momentaneis augmentis, sive partibus Areæ atque Abscissæ infinite parvis, quæ in Momentis temporis generantur. Momentum Lineæ punctum vocavit, ex mente *Cavallerii*; quamvis non sit punctum Geometricum, sed Lineola infinite brevis: Momentum autem Areæ vel superficiei vocavit Lineam, secundum eundem *Cavallerium*; licet non sit Linea Geometrica, sed superficies Latitudine infinite exili. Cumque ordinatam consideraret tanquam Momentum Areæ, eo nomine intellexit Rectangulos sub Geometrica Ordinata & Momento Abscissæ; licet illud Momentum non semper exprimatur. *Sit* ABD, *inquit*, *Curva quævis*, & Com. Ep. N° X.

AHKB *rectangulum, cujus latus* AH *vel* KB *est unitas. Et cogita rectam* DBK *uniformiter ab* AH *motam areas* ABD *&* AK *describere: & quod* [recta] BK (1) *sit momentum quo* [area] AK (*x*) *&* [recta] BD (*y*) *momentum quo* [curvilinea] ABD *gradatum augetur: & quod ex momento* BD *perpetim dato possis per præcedentes* [tres] *Regulas aream* ABD *ipso descriptam investigare, sive cum area* AK (*x*) *momento* 1 *descripta conferre.* Hæc *Newtoni* Idea est operationis in curvis quadrandis: quoque modo hanc ad alia Problemata applicet, in verbis proxime sequentibus monstrat: *Jam*, inquit, *qua ratione superficies* ABD *ex momento suo perpetim dato per præcedentes* [tres] *Regulas elicitur, eâdem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.* Ceterum post aliquot exempla, methodum addit regressionis ab area, arcu, solidove contento ad abscissam; docetque ut eadem methodus extendat se ad Curvas Mechanicas, determinando earum Ordinatas, Tangentes, Areas, Longitudines, &c. Utque assumendo quamvis Æquationem exprimentem relationem inter aream abscissamque curvæ, per hanc methodum invenias ordinatam. Atque hoc est fundamentum methodi fluxionum & momentorum, quod *Newtonus* in Literis datis 24 *Octob.* 1676 hac sententia comprehendit, *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones, & viceversa.*

C. N° X, XII.

In hoc *Compendio* uniformem fluxionem temporis vel cujusvis exponentis temporis per unitatem repræsentat *Newtonus*; Momentum autem temporis vel exponentis sui per literam *o*; fluxiones vero aliarum quantitatum per quævis alia symbola; ac momenta earum

C. N° X, XII.

arum quantitatum per Rectangulos sub illis symbolis & litera *o*; aream porro curvarum per ordinatam in Quadrato inclusam; area pro fluente, & ordinata pro ejus fluxione positis. Cum autem Propositionem aliquam demonstrat; literam *o* adhibet pro finito momento Temporis vel ejus exponentis, aut cujusvis quantitatis uniformiter fluentis; totamque calculationem absolvit per Geometriam veterum in finitis figuris sive schematibus sine ulla approximatione: & cum primum Calculatio peracta est, & Æquatio reducta; supponit momentum *o* decrescere *in Infinitum* atque evanescere. Cum vero non demonstrat, sed solum investigat Propositionem; quo citius rem conficiat, supponit momentum *o* esse infinite parvum, & in scribendo illud negligit, omnibusque approximationum modis utitur, quos nullum in conclusione errorum parituros autumat. Prioris generis specimen habes sub finem *Compendii*, ubi primam trium illarum regularum, quas initio libri posuerat, erat demonstraturus. Secundi generis exempla ibidem habes; cum invenit Curvarum Linearum Longitudinem *p.* 15; & cum eruit ordinatas, Areas, & Longitudines Curvarum Mechanicarum *p.* 18, 19: narratque, qua via per eandem methodum Tangentes duci possint ad Curvas Mechanicas, *p.* 19. Atque in Epist. data 10 *Decemb.* 1672 addit, Problemata de Curvatura Curvarum seu Geometricarum sive Mechanicarum per eandem methodum solvi. Ex quibus manifestum est, se jam tum suam Methodum ad secunda ac tertia momenta extendisse: cum enim Areæ Curvarum considerantur tamquam fluentes (ut in hac *Analysi* fieri solet) ordinatæ exprimunt fluxiones primas; Tangentes autem datæ sunt per fluxiones secundas, & Curvaturæ per tertias. Et vel in *Analysi* hac *p.* 16. ubi *Newtonus* ait, *Momentum est superficies, cum de solidis; & Linea, cum de superficiebus: & punctum,*

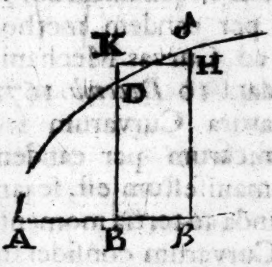
Com. Ep. N° XII.

Ib. N° XXVI.

tium, cum de Lineis agitur; perinde est ac si dixisset, cum solida considerantur tamquam fluentia, eorum Momenta superficies sunt, & eorum momentorum momenta (vel secunda Momenta) Lineæ sunt; & horum Momentorum Momenta (sive tertia Momenta) puncta sunt, secundum sententiam *Cavallerii*: atque in *Principiis* suis *Philosophiæ*, ubi frequenter considerat Lineas tamquam fluentes a Punctis descriptas, quorum velocitates crescunt vel decrescunt, velocitates sunt fluxiones primæ, & earum incrementa secundæ. Ac Problema illud, *Data Æquatione fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire & vice versa*, ad fluxiones omnes pertinet; ut constat ex solutionis ejus Exemplis a *Wallisio* publicatis, Tom. II. operum suorum, p. 391, 392, 396. Quin & in Lib. II. *Principiorum Philosophiæ*, Prop. XIV. Differentiam secundam *Newtonus* appellat *Differentiam Momentorum*.

Quôque melius intelligas, quo calculationis genere *Newtonus* usus fuerit Anno 1669, vel ante, cum hoc *Analyseos* suæ Compendium scripsit; ponam hic ejus demonstrationem primæ illius Regulæ supra memoratæ.

N° XII.



‘ Sit Curvæ alicujus ‘ ADδ Basis AB $= x$, perpendiculariter applicata ‘ BD $= y$, & area ABD $= z$, ‘ ut prius. Item sit B$\beta = o$, ‘ BK $= v$, & Rectangulum BβHK (ov) æquale ‘ spatio B$\beta\delta$D.

‘ Est ergo A$\beta = x + o$, & ‘ A$\delta\beta = z + ov$. His præmissis, ex relatione inter x ‘ & z ad arbitrium assumpta quæro y ut sequitur. ‘ Pro lubitu sumatur [æquatio] $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, sive ‘ $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ (Aβ) pro x, & $z + ov$ ‘ (A$\delta\beta$) pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3xxo$ ‘ $+ 3xoo + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov$

+

‘ $+ o^2 v^2$. Et ſublatis $\frac{4}{9} x^3$ & zz æqualibus, re-
‘ liquiſque per o diviſis, reſtabit $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo$
‘ $+ o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam ſupponamus Bβ in
‘ infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe ni-
‘ hil, erunt v & y æquales, & termini per o mul-
‘ tiplicati evaneſcent; ideoque reſtabit $\frac{4}{9} \times 3xx$
‘ $= 2zv$, ſive $\frac{2}{3} xx$ $(= zy) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}$
‘ $\left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare e contra, ſi $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$.

‘ Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n} \times a x^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſi-
‘ ve ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m + n = p$; ſi $c x^{\frac{p}{n}}$
‘ $= z$, ſive $c^n x^p = z^n$; tum $x + o$ pro x, & $z + ov$
‘ ſive (quod perinde eſt) $z + oy$ pro z ſubſtitutis
‘ prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$,
‘ &c. reliquis nempe [ſerierum] terminis, qui tandem
‘ evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis $c^n x^p$ & z^n æ-
‘ qualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^n p x^{p-1}$
‘ $= nyz^{n-1}$ $\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{c x^{\frac{p}{n}}}\right)$ ſive dividendo
‘ per $c^n x^p$, erit $p x^{-1} = \frac{ny}{c x^{\frac{p}{n}}}$, ſive $pc x^{\frac{p-n}{n}} = ny$;
‘ vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc
‘ eſt m pro $p-n$ & na pro pc, fiet $a x^{\frac{m}{n}} = y$. Qua-
‘ re e contra ſi $a x^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}} = z$.
‘ Q. E. D.

Eadem operandi ratione, etiam Regula ſecunda demonſtrari poteſt. Et ſi quælibet Æquatio aſſumatur, Relationem exprimens inter Abſciſſam & Aream; ordinata inveniri poterit eadem ratione; ut in proximis *Analyſeos* verbis indicatur. Et ſi illa

illa ordinata in unitatem ducta pro Area novæ Curvæ ponatur, novæ illius Curvæ ordinata eâdem methodo inveniri potest; atque ita in perpetuum. Hæque ordinatæ primam, secundam, tertiam, quartam, sequentesque Fluxiones primæ Areæ repræsentant.

Hæc *Newtoniana* fuit operandi methodus, eo tempore quo Compendium illud suæ *Analyseos* scripsit: eâdemque methodo usus est in Libro *Quadraturarum*, atque in hunc usque diem adhuc utitur.

In Exemplis, quibus methodum Serierum & Momentorum in *Compendio* hoc illustrat, hæc sunt: Esto Radius Circuli 1, Arcus z, Sinus x; Æquationes pro inveniendo Arcu cujus Sinus est datus, & Sinu cujus Arcus est datus, erunt

N° X. $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \&c.$

$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \&c.$

N° XIV, XIX, XX. Hujus methodi notitiam *Collinius Gregorio* dedit sub autumno anni 1669; ac *Gregorius*, ope unius ex seriebus *Newtonianis*, post integrum annuum laborem, methodum demum invenit *Decembri* 1670: & bimestri post tempore, in Epistola data 15 *Feb.* 1671, varia Theoremata per eam reperta *Collinio* misit, datâ etiam communicandi licentiâ. *Collinius* autem facillimus erat ad communicandum quæcunque vel à *Newtono* vel *Gregorio* accepisset; ut patet ex Epistolis in hoc *Commercio* jam publicatis. In seriebus, quas in dicta Epistola misit *Gregorius*, hæ duæ sunt: Esto Radius Circuli r, Arcus a, & Tangens t; Æquationes pro inveniendo Arcu cujus Tangens data est, & Tangente cujus Arcus datus est, erunt hæ,

$$a = t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \&c.$$

$$t = a + \frac{a^3}{3rr} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \&c.$$

Eo

Eo ipſo Anno 1671 D. *Leibnitius* duos Tractatus edidit *Londini*; unum Societati Regiæ, alterum Academiæ Scientiarum *Pariſienſi* dedicatum; & in prioris Dedicatione commercium ſuum Epiſtolare cum D. *Oldenburgio* memorat.

Menſe Feb. 167$\frac{2}{3}$, cum in ædibus D. *Boyle* *Leibnitius* in D. *Pellium* incidiſſet, ſibi arrogare viſus eſt Differentialem Methodum *Moutoni*: Cumque *Pellius* oſtendiſſet Methodum illam non novam eſſe, ſed *Moutoni*; perſtitit nihilominus *Leibnitius* in vindicanda ſibi Inventione illa, præ ſe ferens, ſuo ſe Marte inveniſſe, *Moutoniani* operis ignarum, multumque eam promoviſſe. N° XXX.

Cum *Newtoni* ſerierum una *Gregorio* miſſa eſſet, tentavit ille eam deducere ex ſeriebus ſuis inter ſe combinatis; ut ipſe in Epiſtola narrat data 19 Decemb. 1670. Ac per ſimilem aliquam Methodum *Leibnitius*, priuſquam *Londino* diſcederet, reppeariſſe videtur ſummam ſeriei Fractionum decreſcentium in Infinitum, quarum Numerator eſt Numerus datus, Denominatores autem ſunt triangulares vel pyramidales vel triangulo-triangulares, *&c.* Ingens vero Myſterium! De ſerie $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ *&c.* Subduc omnes Terminos præter primum, & remanebit 1 ($= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} -$ *&c.*) $= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} +$ *&c.* Et ab hac ſerie deme omnes Terminos, excepto primo, & remanebit $\frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \frac{2}{4 \times 5 \times 6} +$ *&c.* Et à priore ſerie deduc omnes Terminos præter duos primos, & remanebit $\frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{4 \times 6} +$ *&c.* N° XXX.

Sub

N° XXXI. Sub finem Febr. vel initium Martii, 167$\frac{2}{3}$,
Leibnitius Londino relicto Parisios se contulit, &
ad usque mensem Junium sequentem commercium
cum *Oldenburgio* habuit, deinde Algebram & Geo-
N° XXXII metriam sublimiorem didicit, & mense Julio anni
1674 Commercium cum *Oldenburgio* renovavit,
scribens se mirificum habere Theorema, quod da-
ret Circuli vel ejus Sectoris cujuscumque Aream
accuratè in serie numerorum rationalium; Octo-
bri autem insequente scripsit, se invenisse Circum-
ferentiam Circuli in serie simplicissimorum numero-
rum; & eadem *Methodo* (sic enim Theorema il-
lud nominat) quemvis Arcum cujus Sinus datus sit
posse inveniri in simili serie, licet proportio ad
totam Circumferentiam ignoretur. Theorema er-
go istud hoc efficiebat; ut inveniretur quivis
Sector vel Arcus, cujus Sinus datus sit. Si igno-
ta esset Arcûs proportio ad Circumferentiam to-
tam, Theorema sive Methodus ista tantummodo
Arcum exhibuit; sin nota esset, etiam integram
Circumferentiam dedit: & proinde erat Theore-
ma prius illud ex duobus supradictis *Newtoni*. De-
monstratio vero hujus Theorematis *Leibnitio* tum
non innotuit. Quippe in Epistola data 12 Maii
N° XLIV. 1676, rogavit *Oldenburgium*, ut Demonstrationem
ejus a *Collinio* sibi pararet; eam significans Metho-
dum, per quam *Newtonus* id invenerat.

N° XXXVI. In Epistola à *Collinio* scripta dataque 15 Apr.
1675, *Oldenburgius* ad *Leibnitium* misit octo ex
Newtonianis & *Gregorianis* seriebus; in quibus e-
rant duæ illæ *Newtoni* supradictæ; Pro invenien-
do Arcu cujus Sinus datus est, & Sinu cujus datus
est Arcus; duæque illæ *Gregorii* jam ante memora-
tæ, Pro inveniendo Arcu, cujus Tangens data
N° XXXVII. est, & Tangente cujus datus est Arcus. *Leibnitius*
vero in Responso dato 20 Maii 1675, se Episto-
lam illam accepisse his verbis confitebatur: *Literas*
tuas

uas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro qui-us tibi & doctissimo Collinio *gratias ago. Cum unc præter ordinarias curas Mechanicis imprimis egotiis distrahar, non potui examinare series quas nisistis, ac cum meis comparare. Ubi fecero, perscribam ibi sententiam meam: nam aliquot jam anni sunt uod inveni meas via quadam sic satis singulari.*

Numquam tamen postea, vel * agnovit *Leibni-ius* se recepisse illas series, vel indicavit qua in re uæ ab illis differrent, vel unquam ullas alias pro-ulit, præter illas ab *Oldenburgio* missas, aut series numerales ex eis deductas in casibus particularibus. Quid autem egerit cum *Gregorii* serie, Pro inve-niendo Arcu cujus Tangens data est, ipse narrat n *Actis Eruditorum* Mensis April. 1691, p. 178. *Jam*, inquit, *anno* 1675 *compositum habebam opus-ulum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tem-ore lectum*, &c. Per Theorema pro transmutandis Figuris, simile illis *Barrovii* & *Gregorii*, jam tan-dem invenerat seriei hujus demonstrationem; at-que id erat *Opusculi* istius argumentum. Nondum amen acquisiverat cæterarum Demonstrationem, & occasionem nactus hujus quoque expetendæ, sequentem Epistolam *Oldenburgio* scripsit 12 Maii, 1676. *Parisiis* datam:

Cum Georgius Mohr *Danus nobis attulerit com-municatam sibi à doctissimo* Collinio *vestro expres-sionem rationis inter arcum & sinum per infinitas se-ries sequentes; posito sinu* x, *arcu* z, *radio* 1, N° XLIV.

$$z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \&c.$$

$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

* Cum hæc Recensio scriberetur, non agnoverat, sed anno subse-quente in Epistola ad Comitissam de *Kilmansegg*, agnovit se tunc ab *Oldenburgio* accepisse [*Des Essais*] serierum specimina.

Hæc,

Hæc, INQUAM, *cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingeniosa videntur, & posterior imprimis series elegantiam quandam singularem habeat: ideo rem gratam mihi feceris, vir clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita quam nunc polio. Oro ut Clarissimo* Collinio *multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.*

Hic, qui illud INQUAM legerit, facile existimaverit *Leibnitium* duas illas series nunquam antea vidisse; *diversaque ejus circa hanc rem Meditata* prorsus aliud esse quam serierum unam quas anno superiore receperat ad *Oldenburgio*, demonstrationemque istam, quam tunc expoliret, quantivis pretii fore; quippe quam pro *Newtonianæ* methodi munere ἀντίδωρον acceptissimum erat missurus.

Hâc Epistolâ receptâ, *Oldenburgius*, *Colliniusque* literis ad *Newtonum* scriptis vehementer operam dabant, ut ipse *Newtonus* methodum suam describeret, *Leibnitio* communicandam. Quam ob rem
N° XLVIII. *Newtonus* Epistolam scripsit, 13 Junii 1676 datam: in qua eo modo serierum methodum descripsit, quo antea in supradicto *Compendio* fecerat; hac tamen differentia: Hic fuse descripsit Reductionem dignitatis Binomialis in seriem; at Reductionem per Divisionem radicumque affectarum extractionem leviter tantum attigit: Illic Reductionem fractionum & Radicalium in series per Divisionem Radicumque extractionem fuse descripsit; at posuit tantummodo duos primos Terminos seriei in quam Dignitas Binomialis reduci possit. Inter Exempla, quæ Epistola illa continebat, erant se-
N° XLIX. ries pro inveniendo Numero cujus Logarithmus sit datus, & pro inveniendo verso Sinu cujus Arcus datus sit. Hæc Ep. *Parisios* missa est 26 Jun. 1676,

1676, una cum Manuscripto quodam *Collinii*, extracta quædam continente ex Epistolis *Jacobi Gregorii.*

Gregorius enim prope finem anni 1675, diem suum obierat; *Colliniusque* exoratus a *Leibnitio* aliisque ex Academia scientiarum, extracta ex ejus Epistolis confecit; quæ adhuc extant ipsius *Collinii* manu exarata, hoc Titulo: *Extracta ex D.* Gregorii *Literis*, D. Leibnitio *commodanda, qui exorandus est, ut cum usus eis fuerit, tibi ea remittat.* Porro hæc Extracta ad *Leibnitium* missa fuisse, testis est ipse *Collinius*, in Epistola ad *Davidem Gregorium Jacobi* τοῦ μακαρίτου fratrem, data 11 Aug. 1676; idque amplius constat ex *Leibnitii Tschurnhausiique* Responsis. N° XLVI.

Leibnitii Responsum, *Oldenburgio* missum datumque 27 Aug. 1676, sic incipit. *Literæ tuæ die Julii 26 datæ plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac clarissimis viris* Newtono *ac* Collinio *gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.* Et prope finem Epistolæ, postquam *Newtonianæ* Epistolæ contenta enarrasset, ita pergit: *Ad alia tuarum Literarum venio quæ doctissimus* Collinius *communicare gravatus non est. Vellem adjecisset approprinquationis Gregorianæ linearis demonstrationem. Fuit enim his certe studiis promovendis amplissimus.* Responsum vero *Tschurnhausii*, datum 1 Sept. 1676; cum *Newtoni* de seriebus Epistolam commemorasset, his verbis concluditur: *Similia porro quæ hac in re præstitit eximius ille Geometra* Gregorius, *memoranda certe sunt. Et quidem optime famæ ipsius consulturi sunt, qui ipsius relicta manuscripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt.* In priore Epistolæ parte, ubi de seriebus *Newtonianis* loquitur, se eas leviter percurrisse dicit, visurum si forte in eis in-

N° LI. N° LIII. N° LIV.

veniret *Leibnitii* ſeriem pro circulo Hyperbolâve quadrandis. Quod ſi in extractis *Gregorianarum* Epiſtolarum eam inquiſiviſſet, repperiſſet utique in
N° XX. XLVI. Epiſtola 15 Feb. 1671, ſupra memorata. Quippe extracta illa, in quibus ea habetur Epiſtola, ſuperſunt adhuc *Collinii* manu ſcripta.

Quamquam autem ſeriem illam, de qua agitur, jam bis ab *Oldenburgio Leibnitius* accepiſſet, illam
N° LII. ipſam tamen in Epiſtola data 27 Aug. 1676, velut ſuam *Oldenburgio* remiſit, quaſi munus ἀντάξιον pro Methodo *Newtoni*; præ ſe ferens, ſe jam triennio ante vel amplius amicis ſuis *Pariſienſibus* eam oſtendiſſe; hoc eſt, biennio prius quam eam accepiſſet in *Oldenburgii* Epiſtola 15 Apr. 1675. Atqui illo
No XXXVI. XXXVII. tempore ſeriem illam ſuam eſſe neſciebat; uti conſtat ex ipſius Reſponſo 20 Maii 1675, ſupra citato. Fieri quidem potuit, ut *Londini* eam acceperit, ac Amicis Pariſienſibus oſtenderit, triennio prius quam *Oldenburgio* eam remiſerit: minime tamen conſtat, ſe ejus Demonſtrationem tam mature nactum eſſe. Hanc ubi primum reppererat, tunc demum in *Opuſculo* ſuo eam exhibuit, cumque amicis communicavit: idque ipſe narrat contigiſſe anno 1675. Illud vero probandum & evincendum eſt, ſe prius eam penes ſe habuiſſe, quam ab *Oldenburgio* eam accepiſſet. Quippe in Reſponſo ſuo ad *Oldenburgium*, nullam ex ſeriebus tunc miſſis ſuam eſſe ſciebat; celabatque ab amicis Pariſienſibus, ſe illam cum pluribus aliis ab *Oldenburgio* accepiſſe, ac vidiſſe ſe *Gregorii* Epiſtolam, in qua is *Collinio* eam miſerat, ineunte anno 1671.

In eadem Epiſtola, 27 Aug. 1676, poſtquam deſcripſerat Quadraturam ſuam Circuli Hyperbolæque
N° LII. Æquilateræ, hæc addit *Leibnitius: Viciſſim ex ſeriebus regreſſuum pro Hyperbola hanc inveni. Sit numerus aliquis unitate minor* 1—m, *ejuſque logarithmus Hyperbolicus* l. *Erit* $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3}$ —

$-\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+$ &c. *Si numerus sit major unitate, ut* $1+n$, *tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit Regula quæ in* Newtoni *Epistola expressa est: scilicet erit* $n = \frac{l}{1}+\frac{l^2}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+$ &c. —— *Quod regressum ex arcubus attinet, incideram ego directè in Regulam quæ ex dato arcu sinum complementi exhibet. Nempe sinus complementi* $= 1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}-$ &c. *Sed postea quoque deprehendi ex ea illam nobis communicatam pro inveniendo sinu recto, qui est* $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4\times5}-$ &c. *posse demonstrari.*

In his verbis *Leibnitius* sibi laudem vindicat Co-inventionis quatuor harum Serierum: quamvis Methodus eas inveniendi, ipso expetente, ad eum missa fuerit; quam tamen nondum intelligere nec comprehendere poterat: In eadem Epist. 27 Aug. 1676, orabat D. *Newtonum*, ut clarius eam explicaret. Verba ipsius sunt: *Sed desideraverim ut Clarissimus* Newtonus *nonnulla quoque amplius explicet; ut originem Theorematis quod initio ponit: Item modum quo quantitates p, q, r, in suis operationibus invenit: Ac denique quomodo in Methodo regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex methodo sua derivetur.* Præ se tulit, invenisse se duas series pro Numero cujus Logarithmus sit datus; & tamen in ipsa ea Epist. *Newtonum* rogat, ut Methodum eas ipsas duas series inveniendi sibi explicare velit. Nº LII.

Ubi hanc ejus Epistolam accepisset *Newtonus*, rescripsit se omnes illas quattuor series jam ei communicasse; quarum duæ priores una eademque series esset, Literâ *l* pro Logarithmo positâ cum Nº LXI.

 suo

ſuo ſigno + vel —; tertia vero Exceſſus eſſet Radii ſupra ſinum verſum, pro quo jam antea ſeries ad eum miſſa fuiſſet. His lectis, deſtitit *Leibnitius* ab Inventione hac ſibi vindicanda. Præter

Nº LXIV. hæc, in eadem Epiſtola 24 Octob. 1676, quod petierat *Leibnitius*, methodos ſuas Regreſſionis apertius explicavit. *Leibnitius* tamen, Epiſtola 21 Jun. 1677 data, ulteriorem adhuc petebat Explicationem: paulo vero poſt, cum *Newtoni* Epiſtolam

Nº LXX. repetita vice legiſſet, reſcripſit 12 Jul. 1677, ſe jam quod ignoraverat intelligere; & ex chartis ſuis repoſitis animadvertere, ſe jam antea unam ex *Newtoni* methodis adhibuiſſe; in Exemplo vero quo forte eſſet uſus, eum nihil pulchri & elegantis proveniret, ſe pro ſolita ſua *impatientia* poſtea eam abjeciſſe. Plures itaque (ſi credere fas eſt) directas ſeries, & proinde earum inveniendarum Methodum habuit; priuſquam inveniſſet Methodum Inverſam, ejuſque poſtea oblitus eſſet. Quod ſi chartas ſuas repoſitas diligentius pervolviſſet, etiam hanc Inverſam Methodum ibi repperiſſet. Sed propriarum ſcilicet Methodorum oblitus, *Newtonianas* deſiderabat.

Nº L. Cum *Newtonus* in Epiſtola data 13 Jun. 1676 Methodum ſuam ſerierum enarraſſet, hæc addidit: *Ex his videre eſt quantum fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes amplientur: quippe quæ earum beneficio ad omnia pene dixerim problemata (ſi numeralia* Diophanti *& ſimilia excipias) ſeſe extendit. Non tamen omnino univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam Methodos eliciendi ſeries infinitas. Sunt enim quædam Problemata in quibus non licet ad ſeries infinitas per diviſionem vel extractionem radicum ſimplicium affectarumve pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem infinitarum Serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius ſcribo,*

quod

quod hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cæperunt; adeo ut ab iiſdem jam per quinque fere annos abſtinuerim. His D. *Leibnitius* in Epiſtola ſua 27 Aug. N° LIII. 1676 data, ſic reſpondit: *Quod dicere videmini pleraſque difficultates (exceptis Problematibus* Diophantæis) *ad ſeries infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeo mira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant neque ex Quadraturis. Qualia ſunt (ex multis aliis) problemata methodi Tangentium inverſæ.* Et D. Newtonus in Epiſtola ſua 24 Octob. 1676 reſcripſit: *Ubi dixi omnia* N° LXIV. *pene Problemata ſolubilia exiſtere; volui de iis præſertim intelligi circa quæ Mathematici ſe hactenus occuparunt, vel ſaltem in quibus Raticionia Mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam alia ſane adeo perplexis conditionibus implicita excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus: & multo minus tantarum computationum onus ſuſtinere quod iſta requirerent. Attamen ne nimium dixiſſe videar, inverſa de Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliaque illis difficiliora. Ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum eſt impræſentia literis tranſpoſitis conſignare, ne propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer.* 5accedæioeffh &c. id eſt: *Una Methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumptione ſeriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cætera commode derivari poſſunt; & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad eruendos terminos aſſumptæ ſeriei.*

Ex duabus his *Newtoni* Epiſtolis certo conſtat, jam tum vel potius ante quinquennium inveniſſe illum Reductionem Problematum ad Æquationes fluxionales & Series Convergentes: & ex Reſponſo *Leibnitii* ad harum Epiſtolarum priorem, æque

 cer-

certum eſt tum nondum hunc inveniſſe Reductionem Problematum vel ad Æquationes Differentiales vel ad Series Convergentes.

Idque amplius ex eis manifeſtum eſt, quæ de N°. XXXVIII. hac re ſcripſit *Leibnitius* anno 1691 in *Actis Eruditorum: Jam anno* 1657, inquit, *compoſitum habebam opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum, ſed quod, materia ſub manibus creſcente, limare ad Editionem non vacavit, poſtquam aliæ occupationes ſupervenere; præſertim cum nunc prolixius exponere vulgari more quæ Analyſis noſtra paucis exhibet, non ſatis operæ pretium videatur.* Hanc Quadraturam *vulgari more* compoſitam proferre cœpit *Pariſiis* anno 1675. Anno proximo Demonſtrationem ejus expoliebat, *Oldenburgio* mittendam, ceu Methodi *Newtonianæ* ἀντάλ-
N° XLIV. λαγμα, ut narrat in Epiſtola 12 Maii 1676: & proinde in Epiſtola 27 Aug. 1676 eam miſit contextam & Edolatam *more vulgari.* Hieme inſequente, in Germaniam reverſus per Angliam & Hollandiam, ut negotia publica capeſſeret, non vacavit amplius ad eam prælo parandam, nec operæ pretium exiſtimavit, ea more vulgari prolixius explicare, quæ *Analyſis* ejus paucis exhibet. Hanc ergo novam Analyſin excogitavit, jam in Germaniam reverſus, & proinde non ante annum 1677.

Idque amplius adhuc conſtat ex conſideratione ſequenti. *Barrovius* Methodum ſuam Tangentium anno 1670 in lucem edidit. Inde *Gregorius* Methodum Tangentium hauſit abſque computatione,
N° XVI. uti ad *Collinium* ſcripſit 5 Sept. 1670. *Newtonus* autem ſuam Tangentium cum *Collinio* communicavit
N° XXVI. anno 1672, in Epiſtola 10 Decemb. data, atque hæc ibi addidit. *Hoc eſt unum particulare vel Corollarium potius Methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum non modo ad ducendum Tangentes ad quaſvis Curvas ſive Geometricas ſive Mechanicas, vel quomodocunque rectas Lineas aliaſve*

aliasve Curvas respicientes ; verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris gravitatis Curvarum, &c. *Neque* (*quemadmodum* Huddenii *methodus de Maximis & Minimis*) *ad solas restringitur æquationes illas, quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc Methodum intertexui alteri isti qua Æquationum exegesin instituo, reducendo eas ad series infinitas.* D. autem *Slusius* suam Tangentium Methodum ad *Oldenburgium* misit 17 *Jan.* 167$\frac{2}{3}$, eáque paulo post in *Transactionibus* est publicata. Comperta vero est eadem prorsus esse cum illa *Newtoni.* Fundata erat super tribus Lemmatibus, quorum primum erat, *Differentia duarum dignitatum ejusdem gradus applicata ad differentiam laterum dat partes singulares gradus inferioris ex binomio laterum, ut* $\frac{y^2 - x^3}{y - x} = yy + yx + xx$, *id est, secundum Notationem* Leibnitii, $\frac{dy^3}{dy} = 3yy$. *Newtonianæ* Epistolæ 10 Decemb. 1672. Exemplar ad *Leibnitium* ab *Oldenburgio* missum est, inter Chartas *Jacobi Gregorii*, una cum alia *Newtoni* Epistola 13 Jun. 1676 data. In his duabus cum memoraret *Newtonus*, se generalem admodum Analysin habere, partim consistentem ex Methodo serierum Convergentium, partim ex alia Methodo, qua applicabat eas series ad solutionem omnium fere Problematum (exceptis forte Numeralibus quibusdam quales illæ sunt *Diophanti*) eruebatque Tangentes, Areas, Longitudines, Contenta Solida, Centra Gravitatis, Curvitatesque Curvarum ac Curvilinearum Figurarum seu Geometricarum sive Mechanicarum, minime hærendo ad surdas; methodumque illam Tangentium *Slusianam* non nisi Ramum vel Corollarium esse alterius hujus methodi: his *Leibnitius* visis, dum Domum per *Hollandiam* re- N° XLVI.

verteretur, tum demum meditabatur Promotionem methodi *Slusianæ*. Quippe in Epistola ad *Oldenburgium* Amstelodami data $\frac{18}{28}$ *Novemb*. 1676, sic
N° LXV. scripsit: *Methodus Tangentium a* Slusio *publicata nondum rei fastigium tenet. Potest aliquid amplius præstari in eo genere quod maximi foret usus ad omnis generis Problemata, etiam ad meam (sine extractionibus) Æquationum ad series reductionem. Nimirum posset brevis quædam calculari circa Tangentes Tabula, eousque continuanda donec progressio Tabulæ apparet; ut eam scilicet quisque quousque libuerit sine calculo continuare possit.* Hæc vero erat illa Promotio *Slusianæ* methodi in methodum Generalem, quam tum in animo versabat *Leibnitius*: exque illis ejus verbis, *Potest aliquid amplius præstari in eo genere, quod maximi foret usus ad omnis generis Problemata*, unica res hæc fuisse videtur, qua ille methodum eam ad omnis generis Problemata vellet extendere. Promotio vero per Calculum differentialem nondum ei in mentem venerat; ea quippe referenda erit ad annum sequentem.

N° LVII. In proximis Literis 24 Octob. 1676, mentionem Analyseos suæ fecit *Newtonus*, communicatæ per *Barroviam* cum *Collinio* anno 1669; alteriusque item Tractatus anno 1671 scripti, de seriebus Convergentibus, deque altera illa Methodo, qua Tangentes ducerentur more *Slusii*, Maximæque ac Minimæ determinarentur, & Quadratura Curvarum expeditior fieret, idque non hæsitando ad Radicales; quaque invenirentur series, quæ certis casibus finirentur & Quadraturam Curvarum darent in Æquationibus Finitis, ubi fieri posset. Fundamentum autem harum Operationum conclusit in hanc Sententiam ænigmatice, ut supra, expres-
N° LVII. sam; *Data æquatione fluentes quotcumque quantitates involvente, fluxiones invenire & vice versa.* Quibus extra omnem dubitationem ponitur se jam antea fluxionum methodum excogitasse. Quod si

reli-

reliqua in Epiſtola illa animadvertantur, conſtabit utique ſe Methodum illam jam tum ad magnam perfectionem provexiſſe, & feciſſe admodum generalem: cum illæ in Libro ſuo Quadraturarum Propoſitiones Methodique Serierum Convergentium Lineamque Curvam ducendi per quemvis datorum Punctorum numerum, jam tum ſibi innotuerunt. Quippe, cum Fluxionum methodus haud procedit in Æquationibus finitis, Æquationes in Series Convergentes reducit per Theorema Binomiale perque Fluentium extractionem ex Æquationibus Fluxiones earum involventibus vel non involventibus. Cumque Æquationes Finitæ defuerint, Series Convergentes ex Problematis Conditionibus deducit, aſſumendo Terminos Serierum gradatim, & per conditiones illas determinando. Cumque porro Fluentes à fluxionibus ſint derivandæ, & Fluxionum lex defuerit; legem eam invenit *quam proxime*, Parabolicam lineam per quemlibet datorum Punctorum numerum ducendo. Atque his progreſſionibus, vel illo tempore fluxionum ſuam Methodum multo magis Univerſalem fecerat *Newtonus*, quam vel hodie eſt methodus *Leibnitii* Differentialis.

Hæc *Newtoni* Epiſtola data 24 Octob. 1676, in fine menſis illius vel initio ſequentis viſa eſt *Leibnitio* Londini; ejuſque Exemplar *Hanoveriæ* ei obtigit initio Veris inſequentis: atque ipſe paulo poſt N° LXVI. *Leibnitius* Epiſtola data 21 Jun. 1677 reſcripſit: *Clariſſimi* Sluſii *Methodum Tangentium nondum eſſe abſolutam, Celeberrimo* Newtono *aſſentior. Et jam a multo tempore rem Tangentium generalius tractavi, ſcilicet per differentias Ordinatarum —— Hinc nominando in poſterum*, d y *differentiam duarum proximarum* y, &c. Hic demum primo cœpit *Leibnitius* Differentialem ſuam Methodum proferre: neque vel minimum argumentum eſt, prius eam ſe ſciviſſe, quam poſtremas *Newtoni* Literas accepiſſet.

ſet. Dicit quidem, *jam a multo tempore rem Tangentium generalius ſe tractaviſſe, ſcilicet per differentias Ordinatarum.* Atqui in aliis literis eodem modo jam affirmaverat, ſe plures Convergentes ſeries tam directas quam inverſas inveniſſe; priuſquam ullam inveniendi eas methodum haberet; oblituſque jam erat inverſæ methodi ſerierum, priuſquam utilitatem ejus perciperet. Nemo in cauſa propria ſibi teſtis eſt. Iniquus admodum fuerit Judex, omniumque gentium jura conculcaverit, qui quemquam in ſua cauſa pro legitimo teſte admiſerit. Illud ergo eſt probandum ac oſtendendum, jam antea methodum hanc *Leibnitium* inveniſſe quam Literas illas *Newtoni* accepiſſet. Quod ſi hoc nullo argumento confirmatum fuerit; de primo Methodi Inventore nulla ſupereſt controverſia.

Marchio *Hoſpitalius*, vir candidiſſimus, in Præfatione Libri ſui *De Analyſi quantitatum infinite parvarum*, A. D. 1696 edita, narrat; ut, paulo poſt Tangentium Methodum a *Carteſio* publicatam, *Fermatius* quoque methodum invenerit, quam ipſe tandem *Carteſius* ſuâ in pleriſque ſimpliciorem eſſe confeſſus eſt. ‘ Nondum tamen, inquit ‘ *Hoſpitalius*, tam ſimplex erat, quam poſtea a ‘ *Barrovio* reddita eſt, naturam Polygonorum pro‘ pius conſiderando, quod ſponte ſua menti ob‘ jicit parvulum Triangulum, compoſitum ex par‘ ticula Curvæ inter duas ordinatas ſibi infinite ‘ propinquas jacentis, & ex differentia duarum i‘ ſtarum Ordinatarum, duarumque itidem corre‘ ſpondentium Abſciſſarum. Atque hoc Triangulum ‘ illi ſimile eſt, quod ex Tangente & Ordinata & ‘ Subtangente fieri debet: adeo ut per unam ſimpli‘ cem Analogiam omnis jam Calculatio evitetur, ‘ quæ & in *Carteſiana* & in hac ipſa prius Metho‘ do neceſſaria erat. Quo tamen vel hæc vel

Car-

Carteſiana revocari ad uſus poſſet, neceſſario tollendæ erant Fractiones & Radicales. Ob hujus itaque Calculi imperfectionem, introductus eſt ille alter Celeberrimi *Leibnitii*, qui inſignis Geometra inde eſt exorſus, ubi *Barrovius* aliique deſierant. Porro hic ejus Calculus in Regiones hactenus ignotas aditum fecit; atque ibi tot & tanta patefecit, quæ vel doctiſſimos totius Europæ Mathematicos in admirationem conjecerunt, &c.

Hactenus *Hoſpitalius*. Non viderat nimirum *Newtoni Analyſin*, neque Epiſtolas ejus 10 Dec. 1672, 13 Jun. 1676, & 24 Octob. 1676 datas: quarum nulla ante annum 1699 typis publicata eſt: neſcius itaque *Newtonum* hæc omnia effeciſſe atque indicaſſe *Leibnitio*, *Leibnitium* ipſum arbitratus eſt inde incepiſſe ubi deſierat *Barrovius*; *Leibnitium* docuiſſe, quo pacto *Barrovii* methodus adhiberetur non hærendo ad fractiones & ſurdas, itaque re mirifice eam ampliaſſe & promoviſſe. Similiterque *Jacobus Bernoullius* in Actis Eruditorum *Jan.* 1691, p. 14. ſic memorat: *Qui calculum* Barrovianum (*quem in Lectionibus ſuis Geometricis adumbravit author, cujuſque ſpecimina ſunt tota illa Propoſitionum inibi contentarum farrago*) *intellexerit*, [calculum] *alterum a Domino* Leibnitio *inventum, ignorare vix poterit; utpote qui in priori illo fundatus eſt, & niſi forte in Differentialium notatione & operationis aliquo compendio, ab eo non differt.*

Jam vero, in Methodo ſua Tangentium, *Barrovius* ducit duas Ordinatas indefinite ſibi invicem propinquas, literamque *a* ponit pro Ordinatarum differentia, proque Abſciſſarum differentia literam *e*; & in ducendis Tangentibus has tres Regulas ſtatuit: 1, *Inter computandum*, inquit, *omnes abjicio terminos in quibus ipſarum* a *vel* e *poteſtas habeatur*, *vel*

vel in quibus ipsæ ducuntur in se. Etenim ipsi termini nihil valebunt. 2, Post æquationem constitutam omnes abjicio terminos literis constantes quantitates notas seu determinatas significantibus, aut in quibus non habentur a *vel* e. *Etenim illi termini semper ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt. 3. Pro* a *Ordinatam, & pro* e *Subtangentem substituo. Hinc demum Subtangentis quantitas dignoscitur.*

Nº LXVI. Hactenus *Barrovius* : *Leibnitius* autem in Epistola 21 Jun. 1677, supra citata, in qua primo differentialem suam Methodum cœpit proponere, *Barrovianam* hanc Tangentium Methodum exacte secutus est; præterquam quod literas *a* & *e Barrovianas* mutaverit in *d x* & *d y*. Quippe in Exemplo, quod ibi exhibet, duas ducit Parallelas Lineas, atque omnes Terminos sub inferiore linea ponit, in quibus *dx* & *dy* (divisim vel junctim) sunt plus unius dimensionis; omnes vero Terminos, in quibus *dx* & *dy* absunt, super lineam superiorem statuit; & ob rationes a *Barrovio* datas, omnes hos Terminos facit evanescere. Jam autem per Terminos in quibus *d x* & *d y* unius tantum dimensionis sunt, quosque inter binas illas lineas ponit, proportionem Subtangentis ad ordinatam determinat. Recte itaque animadvertit Marchio *Hospitalius*, *Leibnitium* inde incipere ubi *Barrovius* desierat; quippe utriusque methodus Tangentium prorsus est eadem.

Illud tamen *Leibnitius* de hac methodo superannotat; Conclusionem nempe hujus Calculi cum *Slusii* regula coincidere; illamque regulam cuivis, qui hanc methodum intelligat, in promptu occurrere. Acute sane: quippe in Epistolis suis *Newtonus* indicaverat, *Slusianam* regulam generalis suæ methodi Corollarium tantum esse.

Cum

Cumque in Epistolis *Newtonus* dixisset, in du-endis Tangentibus, Maximisque & Minimis de-erminandis, Methodum suam procedere, non hæ-itando ad surdas ; *Leibnitius* itidem annotat, sic romoveri posse Tangentium suam methodum, ut d surdas & Fractiones non hæreamus ; & de-nde addit : *Arbitror quæ celare voluit* Newtonus *de* No LXVI. *angentibus ducendis, ab his non abludere. Quod ad-it, ex hoc eodem fundamento Quadraturas quoque eddi faciliores me in hac sententia confirmat, nimi-um semper figuræ illæ sunt Quadrabiles quæ sunt ad quationem differentialem.* Ex quibus ejus verbis, um præcedente Calculatione comparatis, non du-ium est, quin tum satis sciverit *Leibnitius*, *New-ono* ad manum fuisse methodum hæc omnia ef-cientem ; apparetque eum tentavisse, si forte Dif-erentialis Tangentium methodus *Barroviana* ad adem efficienda promoveri posset.

Differentialis hujus methodi Elementa publica-it *Leibnitius* in *Actis Eruditorum* Nov. 1684. ex-mplisque ducendi Tangentes maximasque & mi-imas determinandi eam illustravit ; quibus addit ; *Et hæc quidem initia sunt Geometriæ cujusdam multo ublimioris, ad difficillima ac pulcherrima quæque e-iam mixtæ Matheseos problemata pertingentis, quæ ine Calculo Differentiali* AUT SIMILI *non emere quisquam pari facilitate tractabit.* Ubi, cum icit AUT SIMILI, sine dubio ad *Newtoni* Methodum respexit : totaque ista periodus nihil mplius in se habet, quam quod *Newtonus* in li-eris 1672 & 1676 de sua generali methodo affir-naverat.

Et in Actis Eruditorum 1686, p. 279, *Malo au-em*, inquit *Leibnitius*, d x *& similia adhibere quam iteras pro illis, quia istud* d x *est modificatio quæ-am ipsius* x ; *&c.* Sciebat scilicet in hac metho-o *Literas* more *Barrovii* satis commode posse ad-hiberi ;

hiberi; malebat tamen novis Symbolis uti *d x* & *d y*; etsi nihil per hæc Symbola fieri possit, quo non brevius commodiusque per singulas Litera fiat.

Anno sequente in lucem edita sunt *Newton Principia Philosophiæ*, refertus liber ejusmodi Problematibus, qualia *Leibnitius Difficillima* appellaverat & *pulcherrima etiam mixtæ matheseos Problemata, quæ sine calculo differentiali aut SIMILI non temere quisquam pari facilitate tractabit.* De hoc libro sic locutus est Marchio *Hospitalius*, *quas totus fere per hunc Calculum compositus esset.* Et ipse adeo *Leibnitius*, Epistola ad *Newtonum*, data Hanoveriæ $\frac{7}{17}$ *Martii* 1693, ipsiusque manu scripta, quæ adhuc superest, & Regiæ Societati nuper e exhibita, eandem rem agnoscebat his verbis: *Mirifice ampliaveras Geometriam tuis seriebus, sed edit Principiorum opere ostendisti patere tibi quæ Analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque notis commodis adhibitis quæ differentias & summa exhibeant, Geometriam illam quam Transcendente appello, Analysi quodammodo subjicere; nec res mal processit.* Atque iterum in Responso ad D. *Fatium* quod habetur in Actis Eruditorum Maii 1700, p. 203, versu 21, id fassus est *Leibnitius*.

In secundi Libri *Principiorum* Lemmate secundo Elementa hujus calculi synthetice demonstrat sunt; & in fine Lemmatis est Scholium, his verbis: *In Literis quæ mihi cum Geometra peritissim* G. G. Leibnitio *annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentis & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet; & literis transpositis han sententiam involventibus* [Data æquatione quotcunque quantitates fluentes involvente, fluxiones invenire, & vice versa] *eandem celarem: rescripsit*

Vir

Vir Clarissimus [anno proximo] *se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.* In illis Epistolis, & in alia 10 Decemb. 1672 data (cujus exemplar post annos quattuor ab *Oldenburgio* ad *Leibnitium* mittebatur, ut supra diximus) adeo aperte explicaverat suam methodum *Newtonus*; ut non difficile fuerit *Leibnitio*, subsidio methodi Tangentium *Barrovianæ*, ex illis Epistolis eam exsculpere. Certum tamen est, ex argumentis supra allatis, non prius eum scivisse eam, quam Epistolas illas legisset. N° XXVI.

Duarum *Newtoni* Epistolarum 13 Jun. & 24 Octob. 1676 exemplar ab *Oldenburgio* acceperat *Wallisius*, & ex eis plura publicaverat in *Algebra* sua Anglice edita 1683, Latine autem 1693; paulo que post ex Hollandia admonitus est, ut Epistolas illas integras publicaret; quia notiones de fluxionibus *Newtonianæ* cum plausu ibi per hominum ora ferrentur, sub nomine Methodi Differentialis *Leibnitii*. Quamobrem in præfationem primi suorum Operum Tomi, A. D. 1695 editorum, ejus rei mentionem injecit. Et in Epistola ad *Leibnitium* data 1 Dec. 1696, quæ in Tertio Tomo extat, hæc de ea re habet: *Cum Præfationis* (*præfigendæ*) *postremum folium erat sub prælo, ejusque typos jam posuerant typothetæ; me monuit amicus quidam* (*harum rerum gnarus*) *qui peregre fuerat, tum talem methodum in Belgio prædicari, tum illam cum* Newtoni methodo *fluxionum quasi coincidere. Quod fecit ut* (*translatis typis jam positis*) *monitum inteesruerim.* Quin & in Epistola ad *Newtonum* data 10 April 1695, & Regiæ Societati nuper exhibita, sic de ea re verba facit: *Utinam typis ederes prolixas illas duas Epistolas Junii & Augusti* (*Octobrem* dicere debuit) 1676. '*Ex Hollandia certior factus sum,*

Operum Vol. 2. p. 368.

‘ *ſum, amicos ibi tuos hoc poſtulare; quia notio-*
‘ *nes tuæ (de fluxionibus)* Leibnitio *ibi aſcribuntur,*
‘ *ſub nomine* Calculi differentialis. *Hoc ex* Hollan-
‘ dia *accepi cum totus hic Tomus præter partem Præ-*
‘ *fationis jam prælo ſubjectus eſſet, ita ut nihil aliud*
‘ *inſerere hic potuerim, dum ceſſarent operæ, præter*
‘ *brevem illam quam ibi reperies narrationem. Non*
‘ *tam æquus es vel tuo vel Gentis tuæ honori, quam*
‘ *oportebat; cum res quantivis pretii tam diu in ſcri-*
‘ *niis celas, donec alii honorem tibi debitum præri-*
‘ *piant. Conatus ſum in eo negotio debitum tibi red-*
‘ *dere; doleoque me non binas iſtas Epiſtolas integras*
‘ *atque αὐτολεξεὶ edidiſſe.*

Porro illa brevis mentio, quam *Wallifius* præ-fationi illi inſeruit, his verbis habetur: *In ſecundo Volumine (inter alia) habetur* Newtoni *Methodus de Fluxionibus (ut ille loquitur) conſimilis naturæ cum* Leibnitii *(ut hic loquitur) calculo Differentiali (quod qui utramque methodum contulerit ſatis adver-tat, ut ut ſub loquendi formulis diverſis) quam ego deſcripſi (Algebræ cap.* 91 *&c. præſertim cap.* 95) *ex binis* Newtoni *Literis aut earum alteris Junii* 1[illegible] *& Octob.* 24, 1676, *ad* Oldenburgium *datis, cum* Leibnitio *communicandis (iiſdem fere verbis, ſaltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur, ubi* METHODUM HANC LEIBNITIO EXPONIT, *tum ante* DECEM ANNOS *nedum plures* [id eſt anno 1666 vel 1665] *ab ipſo excogitatam. Quod moneo, ne quis cauſetur de hoc Calculo differentiali nibil a nobis dictum eſſe.*

His ad hunc modum actis, anni ſequentis menſe Junio, editores *Actorum Lipſienſium* (vel potius ut ex ſtylo colligitur, ipſe *Leibnitius*) cum de duo-bus prioribus *Wallifii* Tomis narrationem conte-xunt, hujus in Præfatione clauſulæ mentionem fecerunt, queſtique ſunt, non quod dixerit *New-tonum* in duabus illis Epiſtolis explicuiſſe *Leibnitii*

fluxio-

fluxionum Methodum decennio ante vel amplius a se inventam; sed quod, de calculo differentiali verba faciens, eamque ut ait, ob rationem *Ne quis causetur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse*, non monuerit Lectorem, jam tum *Leibnitium* Calculum illum penes se habuisse, cum mutuæ illæ inter ipsum & *Newtonum* literæ, *Oldenburgii* operâ, hinc inde scriberentur. Et in pluribus post illa Epistolis inter *Leibnitium* & *Wallisium* de ea re conscriptis, non negabat *Leibnitius*, *Newtonum* toto ante eas literas datas decennio dictam Methodum invenisse, id quod affirmaverat ibi *Wallisius*; non præ se ferebat, tam mature se suam Methodum excogitasse; nullo argumento probabat, se ante annum 1677 in eam incidisse; neque id ipsum probabat, nisi ex *Newtoni* concesso; non affirmabat ipse, se maturius habuisse; laudabat *Newtonum*, quod in hac re tam candide egerit; concedebat, utramque Methodum eodem in summâ recidere; seque idcirco solitum communi *Analyseos Infinitesimæ* nomine utramque indigitare; adjiciebat, sicuti *Vietæ Cartesiique* methodi, communi *Analyseos Speciosæ* nomine ferebantur; licet in aliquibus differrent; ita forte suam *Newtonique* Methodos in aliquibus differre posse: nihilque sibi vindicabat, præterquam illa in quibus, ut ipsi videbatur, inter se differebant, Notatione scilicet, Æquationibus Differentialibus & Æquationibus Exponentialibus. In Epistola tamen 21 Jun. 1677, Æquationes Differentiales sibi ac *Newtono* communes esse existimabat. Nº LXVI.

Hic erat eo tempore inter *Wallisium* & *Leibnitium* controversiæ status. Quadriennio vero post, cum D. *Fatius* suspicionem injecerat, posse fieri ut *Leibnitius*, secundus *Calculi* inventor, a *Newtono* primo ejus ante multos annos inventore nonnihil surripuerit; *Leibnitius* in Responso suo in Actis Eruditorum Maii 1700 edito, concedebat *Newtonum*

num ſua ſola Minerva methodum excogitaſſe, neque negabat *Newtonum* multis annis ſe priorem in eam incidiſſe: neque plus ſibi arrogabat, quam ſe quoque propria Minerva ac ſine ope *Newtoni* eandem repperiſſe; præque ſe ferebat, tum cum primum eam typis ederet, neſciſſe ſe quicquam præter Methodum Tangentium a *Newtono* inventum eſſe. Cumque de ſublimi quadam parte Methodi loqueretur, qua *Newtonus* A. C. 1686. ſolidum minimæ Reſiſtentiæ invenerat, hæc addidit; *Quam*, inquit, *methodum ante D.* Newtonum *&* me *nullus quod ſciam Geometra habuit*; *uti ante hunc maximi nominis Geometram* NEMO *ſpecimine publice dato ſe habere probavit*; *ante Dominos* Bernoullios *&* me *nullus communicavit*. Huc uſque igitur inventorisprimi nomen minime ſibi vindicavit *Leibnitius*; non auſus id facere ante obitum *Walliſii*, poſtremi illorum Senum, qui quæ inter *Anglos* & *Leibnitium* per annos quadraginta acta erant optime noverant. Deceſſit autem *Walliſius* menſe Octobri 1703; *Leibnitius* vero ſibi demum arrogare hoc cœpit Januario 1705.

Newtonus Tractatum ſuum de Quadraturis edidit, 1704. is vero * diu ante editionem ſcriptus erat; quippe plurima ex eo citata ſunt in Epiſtolis 24 Octob. & 8 Novemb. 1676. Spectat autem ad methodum fluxionum; & ne pro novo opere haberetur, iterabat id *Newtonus* quod ante annos novem a *Walliſio* publicatum erat, nullo tum contradicente, hanc nempe Methodum gradatim fuiſſe repertam annis 1665 & 1666. Jam autem Actorum *Lipſienſium* editores (hoc eſt, ipſe *Leibnitius*) cum de Tractatu hoc agerent, affirmabant

* De hoc Tractatu *Ralphſonus* in Hiſtoria ſua fluxionum Cap. I ſic ſcripſit: *Newtonus* Anno 1704. parvum edidit Tractatum quem circa Annum 1676, ex Tractatu antiquiore extraxit, quemque doctus *Halleius* & ego circa Annum 1691. *Cantabrigiæ* in manibus noſtris habuimus.

Leib-

Leibnitium fuisse primum ejus Methodi inventorem, & *Newtonum* pro Differentiis fluxiones substituisse. Atque hæc affirmatio ortum dedit præsenti controversiæ. N° LXXIX.

Quippe D. *Keillius* in Epistola in *Transactionibus Philosophicis* edita, retorsit in eos hoc telum; *Fluxionum*, inquiens, *Arithmeticam sine omni dubio primus invenit D.* Newtonus, *ut cuilibet ejus Epistolas a* Wallisio *editas legenti facile constabit. Eadem tamen Arithmetica postea, mutatis nomine & notationis modo, a D.* Leibnitio *in* Actis Eruditorum *edita est.* N° LXXIX.

Newtonus, priusquam vidisset id, quod in Actis Leipsiensibus publicatum fuerat, ægre tulit a D. *Keillio* hoc dictum esse; ne forte inde lis aliqua nasceretur. *Leibnitius* quoque, hoc acerbius interpretans quam vel a *Keillio* cogitatum fuerat, in literis ad D. *Sloane* datis 4 Martii 1711, de hoc ut calumnia questus est; petiitque ut Regia Societas injungeret *Keillio*, Palinodiam ut publice caneret. *Keillius* vero id quod scriptum erat probaturum se ac defensurum profitetur, licentiâ a *Newtono*, cui quod in Actis Lipsiensibus dictum est ostendebatur, impetrata. *Leibnitius* autem in altera ad D. *Sloane* Epistola 29 Decemb. 1711 data, neglecta accusationis suæ probatione, Candorem modo suum prædicare, de quo vel dubitare incivile foret; non modum ostendere quo methodum invenisset; in Actis Lipsiensibus suum cuique datum esse; se inventionem novem annis (septem credo dicere debuit) penes se celavisse; ne quisquam (*Newtonum* intelligit) eam sibi præripuisse glorietur; *Keillium* esse hominem juvenem, rerum anteactarum ignarum; dixisse illud, *Newtono* nolente; rixosum porro hominem esse, cui silentium imponi debeat; se cupere ut *Newtonus* ipse sententiam de hac re suam pronuntiaret. Atqui satis noverat, nihil amplius *Keillium* dixisse, quam

N° LXXX (beside "literis ad D. Sloane datis 4 Martii 1711"); N° LXXXV (beside "altera ad D. Sloane Epistola 29 Decemb. 1711 data")

 quod

quod tredecim ante annis, nullo tum contra eunte, dixerat *Walliſius*: noverat *Newtonum* ſententiam de hac re tuliſſe, in Introductione ad librum *Quadraturarum*, prius in lucem editum, quam hæc lis moveretur. *Walliſius* vero jam ad plures abierat: Qui reſtabant in Anglia Mathematici, pro noviciis habentur: de cujuſvis candore *Leibnitius* jure ſuo dubitare volet; *Newtonus* denique, niſi vel diſſimulaverit rem vel abnegaverit, in rixas & moleſtias trahendus eſt.

Regia itaque Societas, cujus Auctoritati non minus *Leibnitius*, quam *Keillius* (uterque ſcilicet in ea Socii,) parere debebant, bis a *Leibnitio* huc provocata, nefaſque eſſe exiſtimans vel damnare vel notare *Keillium*, re nondum examinata; ſcienſque nec *Newtonum* neque *Leibnitium* (qui in vivis ſoli vel ſcirent quid vel meminiſſent quod in his rebus ante annos quadraginta actum ſit) in hac *Keillii* cauſa teſtes eſſe poſſe; negotium id dederunt numeroſo ex Societate conſeſſui, ut excuterent veteres in Archivis ſuis Epiſtolas & Chartas, & quid in eis de hoc negotio reperiſſent, Societati
Nº LXXXVI, exponerent: quam expoſitionem ut primum Societas acceperat, & ipſam & Epiſtolas Chartaſque ipſas in publicum edi juſſit. Ceterum ex illis id Conſeſſui compertum viſum eſt, *Newtonum* anno 1669 vel antea Methodum illam penes ſe habuiſſe, *Leibnitium* vero non ante annum 1677.

Ut Methodi Differentialis primum ſe auctorem venditaret *Leibnitius*, inſimulavit *Newtonum* litera *o* more vulgari pro dato Incremento τῦ *x* primo fuiſſe uſum, qui mos Differentialis Methodi utilitates tollit: poſt edita vero *Principia* mutaviſſe *o* in *ẋ*, ſubſtituendo *ẋ* pro *d x*. Hoc vero nunquam quis probaverit; *Newtonum* umquam *o* in *ẋ* mutaviſſe, vel uſurpaſſe *ẋ* pro *d x*, vel omiſiſſe uti litera *o*. *Newtonus* in *Analyſi* anno 1669, vel ante

ſcripta

ſcripta, & in Libro de *Quadraturis*, & in *Principiis Philoſophiæ* uſus eſt litera *o*; atque adhuc utitur, eodem plane quo prius ſenſu. In libro de *Quadraturis* uſus eſt litera *o* una cum ſymbolo $\dot{x}$; ideoque non poſuit unum loco alterius. Symbola iſta *o* & $\dot{x}$ pro rebus diverſi generis poſita ſunt. Prius eſt momentum, alterum Fluxio eſt ſive velocitas, ut ſupra eſt explicatum. Cum litera *x* pro quantitate uniformiter fluente ponitur; ſymbolum $\dot{x}$ eſt unitas, & litera *o* (ſeu $1\,\dot{x}\,o$) momentum, atque $\dot{x}o$ & dx idem ambo Momentum ſignificant. Literæ punctatæ numquam indicant Momenta; niſi cum multiplicantur per momentum *o* vel expreſſum vel ſubintellectum quo infinite parvæ evadant; & tum Rectangula pro momentis ponuntur.

Newtonus non in formis Symbolorum ſuam Methodum conſtituit, neque ſe alligat ad ullam unam ſpeciem Symbolorum pro fluentibus & fluxionibus. Ubi areas Curvarum pro fluentibus ponit, ſæpe ponit ordinatas pro fluxionibus, & fluxiones denotat per Symbola ordinatarum, ut in *Analyſi* ſua fecit. Ubi Lineas pro fluentibus ponit, quævis ſymbola ponit pro velocitatibus Punctorum Lineas deſcribentium, hoc eſt, pro fluxionibus primis; & quævis alia ſymbola pro incremento earum velocitatum, hoc eſt, pro fluxionibus ſecundis; ut ſæpe fit in *Principiis Philoſophiæ*. Ubi autem literas *x*, *y*, *z*, pro fluentibus ponit; earum fluxiones denotat vel per alias literas ut *p*, *q*, *r*, vel per eaſdem literas alia forma poſitas ut *X*, *Y*, *Z*, vel $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, punctatas, vel per quaſvis Lineas ut *DE*, *FG*, *HI*, conſideratas tamquam earum exponentes. Atque hoc quidem manifeſtum eſt ex Libro ejus de *Quadraturis*, ubi in prima Propoſitione fluxiones indicat per literas punctatas, in ultima propoſitione per ordinatas Curvarum; & in Introductione per alia Symbola, dum Methodum explicat illuſtratque per Exempla. *Leibnitius* in ſua

Methodo nulla Fluxionum Symbola habet; & idcirco *Newtoniana* Fluxionum Symbola ſunt in eo genere prima. *Leibnitius* Symbolis illis Momentorum ſive differentiarum *dx*, *dy*, *dz*, primo uti cœpit anno 1677: *Newtonus* Momenta denotabat
Nº XII. per Rectangula ſub Fluxionibus & Momento *o*, cum *Analyſin* ſuam ſcriberet, anno 1669 vel antea. *Leibnitius* Symbolis *ſx ſy ſz* pro ſummis Ordinatarum uſus eſt, jam inde ab anno 1686: *Newtonus* in *Analyſi* ſua eandem rem denotavit, inſcribendo Ordinatam in Quadrato vel Rectangulo, ad
Nº VIII. hunc modum $\boxed{\frac{aa}{64x}}$. Omnia *Newtoni* Symbola ſunt in ſuo quæque genere prima.

Quandoquidem autem inſimulatum eſt, uſum literæ *o* vulgarem eſſe, ac Methodi differentialis utilitates tollere; e contrario, Fluxionum Methodus, prout a *Newtono* uſurpata eſt, omnes Differentialis Methodi utilitates habet, & præterea alias. Elegantior eſt; quippe in ejus Calculo una tantum infinite parva Quantitas eſt per Symbolum denotata, idque Symbolum eſt *o*. Nullas quantitatum infinite parvarum Ideas habemus: & idcirco in ſuam Methodum Fluxiones introduxit *Newtonus*, ut quantum fieri poſſit per finitas quantitates procederet. Naturalis magis eſt magiſque Geometrica; fundata ſcilicet ſuper primis quantitatum naſcentium rationibus, quæ exiſtentiam in Geometria habent: cum Indiviſibilia contrà, ſuper quibus fundata eſt Differentialis Methodus, nullam exiſtentiam habeant nec in Geometria neque in Natura. Sunt quidem rationes primæ quantitatum naſcentium; at non ſunt quantitates primæ naſcentes. Natura quantitates generat per continuum fluxum ſive Increſcentiam: talemque Arearum & ſolidorum Generationem admiſerunt veteres Geometræ; cum lineam unam in aliam ducerent per motum lo-

localem ad generandam Aream; atque Aream in Lineam per motum localem ducerent ad generandum ſolidum: at computatio Indiviſibilium, ut inde componatur Area vel Solidum, numquam in hunc uſque diem in Geometria locum habuit. Porro *Newtoniana* Methodus utilior quoque eſt illâ alterâ, atque certior; quippe adaptata & ad prompte inveniendam Propoſitionem per tales Approximationes, quales in Concluſione nullum errorem creent, & ad eam exacte demonſtrandam: *Leibnitiana* vero methodus ad inveniendam tantum Propoſitionem, non ad demonſtrandam accommodata eſt. Cum operatio non ſuccedat in Æquationibus finitis; confugere ſolet *Newtonus* ad Series Convergentes; unde Methodus ejus fit incomparabiliter magis univerſalis, quam illa *Leibnitii* quæ intra Finitas Æquationes terminatur: ſiquidem ille nullam partem habet in Infinitarum Serierum methodo. Annos poſt aliquot quam Serierum Methodus inventa eſt, *Leibnitius* propoſitionem invenit pro tranſmutandis Curvilinearibus Figuris, in alias æqualium Arearum Curvilineares, ut inde per Series Convergentes quadrentur; at Methodi figuras illas alias per tales Series quadrandi non erant *Leibnitii*. Ope novæ illius *Analyſeos*, majorem illarum propoſitionum partem, quæ in *Principiis Philoſophiæ* habentur, invenit *Newtonus*. At cum antiqui Geometræ, quo certiora omnia fierent, nihil in Geometriam admiſerint priuſquam Syntheticè demonſtratum eſſet; idcirco Propoſitiones ſuas Synthetice demonſtravit *Newtonus*, ut Cœlorum Syſtema ſuper certa Geometria conſtitueretur. Atque ea cauſa eſt, cur homines harum rerum imperiti, Analyſin latentem, cujus ope Propoſitiones illæ inventæ ſunt, difficulter admodum perſpiciant.

Inſimulatum eſt, *Newtonum* in Scholio ſub finem libri de *Quadraturis* poſuiſſe tertium quartum quintumque terminos Seriei convergentis reſpe-

ctive æquales ſecundæ tertiæ quartæque Differentiis primi termini; & proinde Methodum ſecundæ tertiæ quartæque Differentiarum tum non intellexiſſe. Atqui in prima Libri ejus Propoſitione (anno 1693 a *Walliſio* edita) modum oſtendit inveniendi primam ſecundam tertiam ſequenteſque Fluxiones in infinitum: ac proinde cum Librum eum ſcriberet, ante annum nempe 1676, omnium omnino fluxionum inveniendarum methodum intellexit; & conſequenter, omnium Differentiarum. Quod ſi eam non intellexit, cum anno 1704 Scholium illud in fine Libri ſubjunxerit: neceſſe eſt hoc eo contigiſſe, quod per iſtorum annorum intervallum de memoria forte ei exciderat. Hoc ſolum igitur diſquirendum eſt, oblitus ne fuerit Methodi ſecundarum tertiarumque Differentiarum ante annum 1704.

Principiorum Philoſophiæ libri ſecundi Propoſitione decima, cum exponeret utilitates aliquot Terminorum Convergentis ſeriei ad ſolvenda Problemata, hoc docet *Newtonus*; ſi primus nempe ſeriei Terminus repræſentet Ordinatam BC cujuſcumque curvæ Lineæ ACG; & CBDI ſit Parallelogrammum infinite exile, cujus latus DI ſecet curvam in G, & Tangentem ejus CF in F; tum ſecundus Seriei Terminus repræſentabit lineam IF, & tertius Terminus Lineam FG. Atqui Linea FG dimidium tantùm eſt ſecundæ differentiæ Ordinatæ: & proinde, cum Principia ſua *Newtonus* ſcriberet, Tertium Terminum Seriei æqualem poſuit dimidio ſecundæ Differentiæ Termini primi: & conſequenter,

ter, non oblitus tum erat Methodi *Differentiarum* ſecundarum.

Dum in eo opere verſaretur, ſæpiſſime ei conſiderandum erat Incrementum vel Decrementum velocitatum quibuſcum quantitates generantur; inque ea re recte argumentatur. Atqui incrementum illud vel Decrementum eſt ipſa ſecunda fluxio Quantitatis: non ergo oblitus tum erat Methodi *Fluxionum* ſecundarum.

Anno 1692 *Newtonus*, a *Wallifio* rogatus, miſit ei Propoſitionem primam libri de *Quadraturis*, cum exemplis ejus in primis ſecundis tertiiſque Fluxionibus; id quod cuivis videre eſt in *Wallifii* Operum Tomo Secundo (anno 1693 edito) pag. 391, 392, 393 & 396. Ideoque ne tum quidem oblitus erat Methodi ſecundarum *Fluxionum*.

Nec ſane veriſimile eſt, ſe anno 1704, cum dictum Scholium adderet fine libri de *Quadraturis*, oblitum eſſe non ſolum primæ ipſius illius Libri Propoſitionis, ſed & ultimæ quoque ad quam Scholium iſtud ſubtextum erat. Si vocula *ut*, quæ in Scholio illo inter verba *erit* & *ejus* caſu aliquo excidiſſe potuit, ibi reponatur; tum Scholium iſtud & duabus illis Propoſitionibus & ceteris *Newtoni* ſcriptis congruet: & fruſtra omnino erunt, qui oblivionem hic cavillantur.

Atque hactenus de Natura atque Hiſtoria harum Methodorum egimus: porro haud abs re fuerit de toto hoc negotio obſervationes paucula ſubjungere.

In *Commercio* hoc *Epiſtolico*, tres memorantur *Leibnitii* Tractatus, ſcripti nempe omnes poſtquam exemplar *Principiorum Newtoni* Hanoveriam ei miſſum fuerat; poſtquam viderat quoque ejuſdem libri recenſionem in *Actis Eruditorum* Jan. & Feb. 1689. In his vero *Leibnitii* Tractatibus primariæ *Newtoniani* libri Propoſitiones novo modo recomponuntur, *Leibnitioque* arrogantur; quaſi pri- N° LXXII

us

us eas ipſe invenerat, quam *Newtoni* liber ederetur. Quis teſtem in ſua ipſius cauſa patienter ferat? Vel fidem faciat *Leibnitius* ſe ante *Newtoni* librum editum eas excogitaſſe, vel de eis ſibi vindicandis pudorem habeat.

In Tractatuum illorum poſtremo, viceſima propoſitio (quæ omnium *Newtonianarum* primaria eſt) Corollarium fit propoſitionis decimæ nonæ. Atqui decima illla nona Demonſtrationem ſibi annexam habet παράλογον & falſam. Aut evincat itaque *Leibnitius* demonſtrationem illam non falſam eſſe; aut fateatur ſe 19 & 20 Propoſitiones non ejus Demonſtrationis ope repperiſſe, ſed quo *Newtoni* eximiam illam Propoſitionem pro ſua venditaret, Demonſtrationem ejus extundere fruſtra tentaviſſe. Quippe in 20ª Propoſitione præ ſe fert, neſciſſe ſe qua eam via *Newtonus* invenerat; ut fidem ſcilicet Lectori faceret, ſe ſine illius ope eandem repperiſſe.

Ex erroribus in XVª & XIXª *Leibnitii* propoſitione commiſſis, oſtenderat *Keillius*, *Leibnitium*, cum tres illos Tractatus ſcriberet, operandi vias in ſecundis Differentiis non optime calluiſſe. Id quod amplius adhuc conſtat, ex illius Tractatus tertii Propoſitionibus Xª, XIª, & XIIª. Has enim conſtituit ceu fundamentum Infiniteſimalis ſuæ Analyſeos in conſiderandis Viribus centrifugis; & decimam quidem proponit in relatione ad centrum Curvitatis orbitæ; in undecima tamen & duodecima eam adhibet in relatione ad centrum circulationis. Cum hæc duo diverſa centra confuderit in fundamentalibus his Propoſitionibus ſuper quibus Calculum ſuum ſtruebat, non potuit fieri quin in ſuperædificando peccaret; neque ex erroribus illis extricare ſe valuit, per ignorantiam ſuam in ſecundis tertiiſque Differentiis. Atque hoc ulterius conſtat ex ſexto ſecundi Tractatus Articulo. Quippe in iſto Articulo lapſus eſt *Leibnitius*, pec-

ca-

catumque eo admisit, quod nesciret secundas tertiasque Differentias recte tractare. Cum hos itaque Tractatus componeret, in Discipulorum adhuc classe versabatur; idque eum decet, si pudor est, candide fateri.

Omnino ergo verisimile est, quemadmodum ex dictis tribus *Newtoni* Epistolis cum *Barroviana* Tangentium Methodo comparatis differentialem illam methodum extuderat *Leibnitius*; ita decennio post, cum *Newtoni Principia Philosophiæ* in publicum prodirent, aliquatenus eum in illa progressum esse, dum tentaret dictam Methodum ad primarias *Newtoni* propositiones extendere; & ea occasione tres illos Tractatus conficeret. Quippe Propositiones quæ in illis habentur, si Errores & Quisquilias dempseris, omnino vel *Newtonianæ* sunt, vel ut Corollaria ex eis facile deducendæ; in alia scilicet verborum forma, re tamen non diversa, jam ante a *Newtono* publicatæ. Has tamen *Leibnitius* venditavit, tamquam a se solo diu ante inventas, quam a *Newtono* sint editæ. Nempe in extremo primi Tractatus, se invenisse eas fingit, antequam *Newtoniana Principia* prodiissent; immo nonnullas ex eis, antequam ipse *Parisiis* discessisset, hoc est, ante Octobrem anni 1676. Tractatum autem secundum claudit his verbis: *Multa ex his deduci possunt praxi accommodata, sed nobis nunc fundamenta Geometrica jecisse suffecerit, in quibus maxima consistebat difficultas: & fortassis attente consideranti vias quasdam novas satis antea impeditas apperuisse videbimur. Omnia autem respondent nostræ Analysi Infinitorum, hoc est calculo summarum & differentiarum (cujus elementa quædam in his Actis dedimus) communibus quoad licuit verbis hic expresso.* In his, ut vides, jactat *Leibnitius*, se primum *fundamenta Geometrica in quibus maxima consistebat difficultas* in hoc ipso Tractatu secundo posuisse; seque solum *vias quasdam novas satis antea*

im-

impeditas in Tractatu eodem aperuisse: cum tamen prius ferme biennio prodiissent *Newtoni Principia*, atque in hoc ipso Tractatu edolando subsidio fuissent *Leibnitio*; quin & *communibus quoad licuit verbis* composita essent; atque omnia ista *Fundamenta* omnesque istas *vias novas* in se continerent. Atque horum omnium conscius erat *Leibnitius*, tum cum Tractatum illum ederet; ultroque tum agnoscere & prædicare debebat, *Newtonum* fuisse, qui *Fundamenta Geometrica in quibus maxima consistebat difficultas* primus posuerit, qui *vias novas satis antea impeditas* primus expediverit. Atque hæc quidem omnia quodammodo agnoscebat in Responso ad D. *Fatium*, *Quam Methodum*, inquiens, *ante dominum* Newtonum *&* me *nullus quod sciam Geometra habuit*; *uti ante hunc maximi nominis Geometram* NEMO SPECIMINE *publice dato se habere* PROBAVIT. Atqui quod ea occasione tam libere fassus est *Leibnitius*; si candor, si honor ei constet, ubique ac semper profiteri debet.

N° LXXVI. In Epistola sua 28 Maii 1697 ad *Wallisium* scripta sic narrat *Leibnitius*: *Methodum*, inquit, *Fluxionum profundissimi* Newtoni *cognatam esse methodo meæ differentiali non tantum animadverti postquam opus ejus* [Principiorum scilicet] *&* *tuum prodiit; sed etiam professus sum in Actis Eruditorum, & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo Analyseos infinitesimalis; quæ latius quam Tetragonistica patet. Interim quemadmodum &* Vietæa *&* Cartesiana *methodus Analyseos speciosæ nomine venit; discrimina tamen nonnulla supersunt; ita fortasse &* Newtoniana *&* Mea *differunt in nonnullis.* Et in his quoque profitetur *Leibnitius*, cum *Newtoni Principia* prodiissent, se percepisse statim Affinitatem quæ inter geminas Methodos intercedit, & idcirco communi

ni se utramque *Infinitesimalis Methodi* nomine vocitare; quin & candoris sui esse ut Affinitatem illam agnoscat. Atqui si pro homine candido haberi se postulat, idem hoc, quod agnovit olim, & nunc debet agnoscere. Quin & fatetur Methodum *Newtonianam* eo fere gradu suæ methodo præivisse, quo *Vieteam Cartesianæ*: atque ut inter has, sic inter suam & *Newtoni* discrimina quædam manere: & deinde ea enumerat, quibus *Methodum Newtoni* ampliasse & promovisse se arbitratur. Atqui Temporis illam Prærogativam, quam tum apud *Wallisium Newtono* concedebat, etiam adhuc & apud suos debet concedere.

Cum Discrimina illa sive Augmenta *Newtoni Methodo* a se addita memorat *Leibnitius*; in secundo loco ponit *Differentiales Æquationes*. Atqui Epistolæ illæ, quæ anno 1676 inter ipsos intercesserunt, clare monstrant *Newtonum* eo tempore Differentiales istas habuisse, *Leibnitium* vero minime. In tertio loco recenset *Æquationes Exponentiales*: atqui has quoque *Anglis* debet *Leibnitius*. *Wallisius*, in serierum interpolatione, consideravit fractos & negativos Dignitatum Indices: *Newtonus* in computationes Analyticas Fractos, Surdos, Negativos, & Indefinitos Dignitatum Indices introduxit, & Epistola 24 Octob. 1676 certiorem fecit *Leibnitium*, ad affectas Æquationes, quæ Dignitates eas quarum Indices Fracti vel Surdi erant, involverent, suam Methodum se extendere. In Responso autem 21 Jan. 1677 dato, vicissim petit a *Newtono Leibnitius*, ut dicere vellet quid de Resolutione Æquationum sentiret, involventium Dignitates quarum Indices essent indeterminati; quales hæ essent $x^y + y^x = xy$. $x^x + y^y = x + y$. Atqui has ipsas Æquationes nunc *Exponentiales* nominat, seque orbi Literato venditat primum earum Inventorem, hancque ut eximiam quandam Inventionem ostentat; nec tamen vel agnovit ha-

N° LXIV.

N° LXIX

ctenus

ctenus auxilia ad rem eam inveniendam a *Newtono* sibi subministrata, nec vel uno Exemplo utilitatem ejus, ubi Dignitatum Indices sint Fluentes, ostendere valuit. Cum autem, ut credibile est, nondum eam pro solita sua *Impatientia* præque talis Exempli inopia abjecerit; æquum est, ut speremus tandem eum aliquando mirificam ejus utilitatem publice ostensurum esse.

N° LXIV. In Epistola ad *Leibnitium* 24 Octob. 1676 data *Newtonus* dixerat, se binas inversa Tangentium Problemata & alia ejusmodi difficilia resolvendi Methodos habere; quarum unam consistere *in assumendo seriem pro quavis ignota Quantitate unde ceteræ commode possent deduci, & in conferendo homologos Terminos suborientis Æquationis, pro determinandis assumptæ Seriei Terminis.* Quid hîc facit *Leibnitius?* Multos post annos, in *Actis* scilicet *Eruditorum* Augusti 1693, hanc Methodum tamquam suam publicat, ejusque primam sibi inventionem arrogat. Aut publice vero huic abrenuntiet; aut argumentis vincat se eam invenisse, priusquam dictas *Newtoni* literas acceperit.

Illud quoque publice ei confitendum est, se *Oldenburgii* Epistolam 15 Aprilis 1675 accepisse: qua plurimæ series convergentes pro Curvis quadrandis, & imprimis illa *Jacobi Gregorii* pro arcu dati Tangentis inveniendo, atque inde Circulo quadrando continebantur. Hoc quidem privatim fassus est, Epistola ad *Oldenburgium* propria manu 20

N° XXXVII. Maii 1675 scripta, quæque adhuc superest in *Libro* Regiæ Societatis *Epistolari*: nondum tamen publice agnovit; ut tum sane factum oportuit, cum illam ipsam Seriem ut suam maluit edere.

Porro illud quoque agnoscendum ei est publice,

N° XLVI. se extracta Epistolarum *Gregorianarum* accepisse, quæ ipsius rogatu Parisios ei misit *Oldenburgius* mense Junio 1676; in quibus erat una *Gregorii* de

ista

iſta ſerie 15 Feb. 1671, & *Newtoni* alia de *Methodo Fluxionum*, 10 Decemb. 1672.

Quandoquidem autem in Epiſtola 28 Dec. 1675 *Oldenburgio* ſignificavit *Leibnitius*, ſe ſeriem illam cum amicis Pariſienſibus *biennio ante*, communicaſſe, deque ea re *aliquoties* ad ipſum ſcripſiſſe; in alia item Epiſtola 12 Maii 1676, ſe de ſerie illa *ante aliquot annos* ad ipſum literas dediſſe; porro in alia 27 Aug. 1676. ſe ſeriem illam amicis oſtendiſſe *triennio ante & amplius*, hoc eſt, quam primum *Pariſios* a *Londino* veniſſet: illud a *Leibnitio* jure expectamus, ut dicat quî evenerit, ut cum *Oldenburgii* Epiſtolam 15 Apr. 1675 acciperet, illam ipſam ſeriem eſſe *ſuam* ignoraverit. Nº XLIII. Nº XLIV. Nº LII. Nº XLII.

In Epiſtolis 15 Jul. & 26 Octob. 1674 datis, non niſi *unam* ſeriem memorat *Leibnitius* pro Circuli Circumferentia; methodumque, qua ad hanc pervenerit, ſibi aliam ſeriem obtuliſſe dicit, pro Arcu cujus ſinus datus fuerit, etſi Arcûs proportio ad Circumferentiam totam ſit ignota. Ergo iſta Methodus, ex dato triginta graduum ſinu, ſeriem ei ſuppeditavit pro Circumferentia tota. Quod ſi ſeriem quoque habuit pro tota Circumferentia a XLV graduum Tangente deductam, rogatur ut publice doceat, qua Methodo quæ ambas iſtas ſeries ei dare poſſet, eo tempore ſit uſus: cum Methodus per figurarum Tranſmutationem nequaquam hoc efficere valeat. Rogatur inſuper, ut rationem reddat, cur in iſtis Epiſtolis non niſi unam Circuli Quadraturam memoret. Nº XXXII XXXIII.

Porro ſi anno 1674 jam tum Demonſtrationem habuit Seriei pro inveniendo cujus ſinus datus ſit Arcu; rogatur ut eam in publicum proferat; dicatque cur in Epiſtola 12 Maii 1676 ab *Oldenburgio* peteret, ut ille *Newtoni* Demonſtrationem pro ipſa illa Serie a *Collinio* adipiſceretur; & qua tandem re *Newtoniana* ſeries a ſua illa differat. Quippe ex his omnibus non levis ſuſpicio oritur, *Newtonianam* Nº XLIV.

nianam seriem pro reperiendo cujus sinus datus sit Arcu, *Leibnitio* dum in *Anglia* commoraretur esse traditam: illumque postea 1673 Parisiensibus eam amicis pro sua venditasse; proximoque anno etiam ad *Oldenburgium* quasi de sua literas dedisse, quo Demonstrationem sive Methodum Serierum ejusmodi inveniendarum expiscaretur. Anno vero insequente, cum *Oldenburgius* & istam de qua loquimur seriem & illam *Gregorianam* & sex præterea alias ad ipsum misisset, non diutius eam seriem arrogare sibi *Leibnitius* sustinuit, inopiâ Demonstrationis: seque dixit series istas lentè examinare cumque suis comparare, quasi suæ illæ a seriebus ex *Anglia* missis essent diversæ. Denique cum seriei *Gregorianæ* Demonstrationem extudisset per Figurarum Transmutationem, Parisiensibus eam seriem amicis velut suam ostentare cœpit; ut ipse in *Actis Eruditorum* Apr. 1691, pag. 178 narrat; *Jam anno*, inquiens, 1675 *Compositum habebam Opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab Amicis ab illo tempore lectum* &c. At Amicos istos celavit Epistolam, qua per *Oldenburgium* illam seriem nactus est; ipsique adeo *Oldenburgio* asseveravit, se uno alterove anno ante scriptam ejus Epistolam seriem istam repperisse. Porro & sequente anno, cum binas *Newtoni* series per *Georgium* quendam *Mohr* iteratò accepisset, sic de eis ad *Oldenburgi-*
Nº XLIV. *um* scripsit, ut numquam sibi antea visis, ab eóque petiit ut per *Collinium Newtoni* pro eis inveniendis Methodum nancisceretur. Ceterum hanc gravem suspicionem si eluere volet *Leibnitius*; illud imprimis argumentis certis ostendat, se seriem istam *Gregorianam*, priusquam per *Oldenburgium* eam accepisset, suo solius acumine repperisse.

Hoc quoque, prout æquum est, monstrabit *Leibnitius*; qua primùm Methodo diversas illas Regressionis Series pro Circulo & Hyperbola, a *Newto-*
Nº XLIX. *no* quidem ad ipsum missas 13 Jun. 1676, at in
Nº LII.

Epi-

Epiſtolâ ſuâ 27 ſequentis Auguſti ſibi attributas, N° LII.
invenerit; antequam a *Newtono* eas accepiſſet.

Cumque ab ipſo rogatus *Newtonus* Regreſſionis N° LXIV.
Methodum ei indicaviſſet; quam ut primum legit *Leibnitius*, neque ſuam eſſe agnovit, & ne intellexit quidem: poſtea vero quam percipere eam po- N° LXX.
tuit, ut ſuam ſibi arrogavit, olim ſcilicet a ſe inventam, ſed in Chartis ſuis reconditis oblivione ſepultam. Vel probet *Leibnitius*, ſi candidi æquique hominis nomen cupit auferre, ſe primum ejus Methodi inventorem eſſe, vel vero inventori concedat.

In Literis ad *Oldenburgium* datis 3 Feb. $167\frac{2}{3}$ N° XXX
Proprietatem quandam ſeriei Numerorum, Naturalium, Triangularium, Pyramidalium, Triangulotriangularium &c. ut inventum ſuum oſtentavit *Leibnitius*; quoque majorem fidem faceret, mirari viſus eſt D. *Paſcalium* in *Triangulo* ſuo *Arithmetico* eam præteriiſſe. Ceterum is Liber *Paſcalii* anno editus eſt 1665, atque iſtam ipſam ſeriei ejus Proprietatem continet. Agnoſcat itaque *Leibnitius*, Proprietatem iſtam minime a *Paſcalio* fuiſſe præteritam; neque pergat ſibi vindicare, cum veri inventoris injuria.

Abrenuntiet quoque methodo Differentiali *New-* N° XXX.
toni; neque ſe in partes ingerat, quaſi ſecundus ſcilicet inventor. Secundis Inventoribus, etiam revera talibus vel exiguus vel nullus eſt honos; tituli vel juris nihil eſt. Quid cum iſtis igitur fiet, qui vel Secundos ſe fuiſſe nullis certis Argumentis poſſunt evincere? In literis ad D. *Sloane* 29 N°
Decemb. 1711 datis, *Amicos* ait ſuos probe ſcire, LXXXV.
quo pacto Differentialem Methodum invenerit. Quid *Amicos* nobis narrat? Ipſe plane, aperte, ſine tergiverſatione dicat, qua eam via reppererit. In iiſdem ad D. *Sloane* literis narrat, ſe *novennio* ante quam eam in lucem ederet, methodo potitum eſſe; hoc eſt, anno 1675 vel prius. Atqui

certum est, 27 Aug. 1676 cum literis ad *Oldenburgium* mitteret, nondum illum habuisse eam. Quippe ibi affirmat, Problemata inversæ Tangentium Methodi, plurimaque alia, non posse ad series infinitas neque ad Æquationes aut Quadraturas reduci. Quomodo hæc duo conciliari inter se possint; ipse ubi otium est videbit.

Jam supra didicimus; *Leibnitium*, dum per *Angliam* & *Hollandiam* domum rediret, dedisse operam *Slusianæ* pro Tangentibus Methodo promovendæ, & ad omne genus Problemata extendendæ; eaque causa generalem Tangentium Tabulam conficere voluisse. Nondum igitur veram istiu Methodi Promotionem invenerat. Atqui semestr fere post tempore, cum in veram ejus Promotionem recens inciderat, rescripsit his verbis: Cl rissimi Slusiii *methodum Tangentium nondum esse a solutam Celeberrimo* Newtono *assentior: & jam*

Nº LXVI. MULTO TEMPORE *rem Tangentium ge ralius tractavi, scilicet per Differentias Ordinatar* Bene sane, *a multo tempore*, nimirum *semestri*. E cogitet jam aliquid pro *candore* suo *Leibnitius*, c tantillum temporis ut *multum* deprædicaverit; n si eo consilio ut inventoris titulum *Newtono* pr riperet, fidemque faceret se diu antequam *Newtoni* Literis eam edoctus esset, differentialem M thodum penes se habuisse.

In Actis Eruditorum Junii 1696, dum duos p ores *Wallisianorum* operum Tomos recensent e tores (hoc est, ipse *Leibnitius*) ita narrant: *Ce rum ipse* Newtonus, *non minus candore quam pr claris in rem Mathematicam meritis insignis, publ & privatim agnovit* Leibnitium, *tum cum inter niente celeberrimo Viro* Henrico Oldenburgo *B mensi Societatis Regiæ Anglicanæ tunc Secreta inter ipsos (ejusdem jam tum Societatis socios) Comm cium intercederet, id est jam fere ante annos vig & amplius, Calculum suum differentialem, series*

infini

infinitas & pro iis quoque Methodos generales habuisse; *quod* Wallisius *in Præfatione operum*, *factæ inter eos communicationis mentionem faciens*, *præteriit*, *quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat*. *Cæterum Differentiarum consideratio* Leibnitiana, *cujus mentionem facit* Wallisius (*nequis scilicet*, *ut ipse ait*, *causaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse*) *meditationes aperuit*, *quæ aliunde non æque nascebantur*. Ex his patet a *Leibnitio* lectam esse Præfationem illam *Wallisii*, in qua narrat is *Newtonum* (anno 1676) Methodum suam Fluxionum *Leibnitio* explicavisse, *quam tamen decennio ante vel amplius* Newtonus *invenisset*. Atqui a *Newtono* numquam creditum est, *Leibnitium* ante annum 1677 *Differentialem methodum* invenisse: ipseque adeo *Leibnitius* in *Actis Erud.* April. 1691, p. 178, fassus est, inventam esse postquam domum *Parisiis* redisset ad negotia publica capessenda, hoc est, post annum 1676. Quod autem ad generalem ejus *Infinitarum Serierum* Methodum attinet; tantum abest ut Generalis dicenda sit; ut vel exiguæ vel nullius prorsus sit utilitatis; nisi forte ut ansam *Leibnitio* præbeat, qua *Gregorianam* pro Circulo Quadrando Seriem sibi adhamet transferatque.

In Responso ad D. *Fatium* in *Actis Erud.* 1700, p. 203, editis, hæc habet *Leibnitius*. *Ipse* [Newtonus] *scit unus omnium optime*, *satisque indicavit publice cum sua Mathematica Naturæ Principia publicaret*, *Anno* 1687, *nova quædam inventa Geometrica*, *quæ ipsi communia mecum fuere*, NEUTRUM LUCI AB ALTERO ACCEPTÆ, *sed meditationibus quemque suis debere*, *& a me decennio ante* [i. e. anno 1677] *exposita fuisse*. Atqui in Libro *Principiorum* hic ad partes vocato, minime agnovit *Newtonus* suis eam Methodum viribus invenisse *Leibnitium*, non a *Newtonianis* illis Epistolis adjutum: *Wallisiusque* nuper contrarium asseveraverat, refellente tum nemine vel contradicente.

cente. Quod si postea eam sine ope *Newtoni* quam maxime invenisset *Leibnitius*; secundis tamen Inventoribus exilis prorsus est gratia, nec nisi in inferiori subsellio locus; ne dicam, omnino nullus.

In eodem ad *Fatium* Responso hæc quoque habet *Leibnitius*: *Certe cum elementa Calculi mea edidi anno* 1684, *ne constabat quidem mihi aliud de inventis ejus* [sc. Newtoni] *in hoc genere, quam quod ipse olim significaverat in literis, posse se Tangentes invenire non sublatis irrationalibus, quod* Hugenius *quoque se posse mihi significavit postea, etsi cæterorum ejus calculi adhuc expers. Sed majora multo consecutum* Newtonum, *viso demum libro* Principiorum *ejus, satis intellexi.* In his iterum agnovit, librum *Principiorum* ad *Newtonianam* Fluxionum Methodum sibi aditum patefecisse: idem tamen ipse jam negat, quicquam illius Methodi in dicto Libro contineri. In his simulat, se prius quam iste liber prodiisset nihil amplius de *Newtoni* inventionibus scivisse, quam quod Methodum quandam Tangentium habuerit: & ex isto demum Methodum ejus Fluxionum percepisse: atqui in Epistola 21 Jun. 1677 data, agnovit Methodum eam ad Curvilinearum Figurarum Quadraturas se extendere, suæque similem esse. Verba ejus hæc
N° LXVI. sunt: *Arbitror quæ celare voluit* Newtonus *de Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento Quadraturas quoque reddi faciliores me, in sententia hac confirmat: nimirum semper figuræ illæ sunt quadrabiles quæ sunt ad æquationem differentialem.*

N° XXVI. XLVI, XLVIII, LIV. *Newtonus* in tribus illis Epistolis, quas (ut diximus) ab *Oldenburgio Leibnitius* acceperat, tam generalem esse suam Methodum dixerat, ut ope Æquationum, Finitarum & Infinitarum, determinaret Maximas & Minimas, Tangentes, Areas, Solida Contenta, Centra Gravitatis, Longitudines ac Curvitates Curvarum Linearum Curvilinearum

nearumque Figurarum, idque ſine ablatione Radicalium; extenderetque ſe ad ſimilia Problemata in Curvis (ut vulgo vocantur) Mechanicis, itemque ad Problemata Tangentium inverſa, & ad omnia fere, niſi forte Numeralia quædam, qualia ſunt *Diophanti*. *Leibnitius* vero in Ep. 27 Aug. 1676, vix credere ſe poſſe finxit, eam Methodum tam eſſe Generalem. N° LI. *Newtonus* in prima ex tribus illis Epiſtola N° XXVI. Tangentium Methodum propoſuit ex generali ea Methodo deductam, exemploque eam illuſtravit; generaliſque methodi Ramum vel Corollarium eſſe monuit; & ejuſmodi eſſe *Sluſianam*, quæ nondum tum prodierat, conjecit. Hac re excitatus *Leibnitius* meditabatur ſiqua via promovere poſſet Methodum *Sluſianam*, eamque ad omnia Problemata extendere, quemadmodum jam ante ex ejus Literis monſtravimus. In tertia vero Epiſtola ſuam Methodum illuſtraverat *Newtonus* per Theoremata pro Quadraturis & eorum exempla. N° LVIII. Quibus adjutus *Leibnitius*, in Ep. 21 Junii 1677 Methodum ſuam cum *Newtoniana* congruere dixit, du- N° LXVI. cendo Tangentes, producendo Methodum *Sluſii*, procedendo ſine Fractionum & Surdarum ablatione, Quadraturaſque reddendo multò expeditiores. His tot & toties actis; ad Conterraneos ſuos affirmare, ſe cum Differentialem Methodum anno 1684 ederet, nihil tum amplius de *Newtoni* invento inaudiviſſe, quam quod is Methodum quandam Tangentium haberet, cujus tandem eſt hominis?

Porro eo tempore *Leibnitius* de ſua Methodo nihil aliud prædicaverat, niſi per eam Tangentes duci poſſe, Maximaſque & Minimas determinari, ſine ademptione Fractionum vel Surdarum. Hoc vero totum etiam per *Newtoni* Methodum effici poſſe certo ſciebat; neque candidi erat hominis id diſſimulare. Cum autem hactenus ſuam Methodum expoſuiſſet *Leibnitius*, addidit ſe hic *Geometriæ multo ſubli-*

Vide Acta Eruditorum pro menſe *Nov.* 1684.

sublimioris initia posuisse, pervenientis ad difficillima quæque & utilissima Problemata, quæ sine Calculo Differentiali AUT SIMILI vix solvi possint. Quid vero illud AUT SIMILI sibi vellet, quî quæso Conterranei ejus sine Oedipode poterant intelligere? Enimvero planis disertisque verbis dictum ab eo oportuit, SIMILEM illam quam innuit Methodum *Newtoni* fuisse; quam latè ea pateret, quam a longo tempore reperta esset, prout ipse ex *Anglia* didicisset, narrare; suamque illâ posteriorem esse confiteri. Hoc omnes controversias præcidisset; hoc candidi & honesti viri officium erat. Horum tamen omnium quasi oblitus, suis ille Conterraneis in Responso ad *Fatium* prædicat, se cùm Anno 1684 Calculi sui Elementa ederet, nihil tum de ulla SIMILI methodo inaudivisse, nihil de ulla alia nisi ad ducendas Tangentes: quod qualis hominis fuerit, aliis dicendum relinquo.

Illud denique *Leibnitio* est expediendum; quî factum sit ut in *Responsis* suis ad *Wallisium* & *Fatium*, quorum uterque Primi ejus Methodi Inventoris gloriam *Newtono* detulerat, nihil tum ipse de se ut Priore Inventore dicebat; sed senum Geometrarum mortem operiebatur, aliosque qui superstites adhuc sunt pro Novitiis habebat: quin & ipsum *Newtonum* adortus cum quoquam se alio certaturum negabat. Atqui dixerat ei *Newtonus*,
N° LVII in Ep. 24 Octob. 1676, se, quo quietius ætatem ageret, consilium publicandi quæ de hoc Argumento scripserat abjecisse: & ex eo quidem tempore studiose vitavit omnes de rebus Philosophicis ac Mathematicis Disputationes; quin & a Commercio de his rebus Literario, ut Disputationibus ansam porrigente, data opera abstinuit; eandemque ob causam, neque de *Leibnitio* queri prius sustinuit, quam in *Actis* se *Lipsiensibus* ut Plagiarium traduci vidisset, *Keilliumque* eo tantum nomine in lites trahi, quod ab hoc eum crimine vindicare conatus sit.

Inſimulatum quidem eſt, quaſi Regia Societas Sententiam contra *Leibnitium* in hac cauſa tuliſſet, non utraque parte audita. Non ita ſe res habet: nondum ſententiam tulit Societas. *Leibnitius* quidem poſtulabat a Societate, ut *Keillium* inauditum damnare vellet: adeo ut ipſe jure eodem ſic damnari potuiſſet; cum idem ſit jus *Seio* quod *Titio*, *Keillio* quod *Leibnitio*. Cumque accuſationem ſuam adverſus *Keillium* deſtituiſſet *Leibnitius*, jure potuiſſet Societas notam illi inurere. Ea vero certorum tantum hominum Conſeſſum legit, qui ſcrutarentur Epiſtolas atque Chartas, quæ de his rebus in Archivis Societatis habentur; & ſecundum illas Chartas Epiſtolaſque rem ipſam ut erat Societati narrarent. Non enim ideo lecti erant, ut *Leibnitium* vel *Keillium*, ſed ut veteres Chartas examinarent: in eaque re probe ſe & honeſte geſſerunt. Numeroſus quippe Conſeſſus erat, e viris eruditis diverſarum Nationum lectus: quorum fidem in Epiſtolis Chartiſque examinandis, fideliterque edendis, nihil quicquam ullius hominis gratia addendo vel omittendo vel mutando, Societas tota comprobavit. Quin & ipſæ Ep. atque Chartæ, Societatis juſſu, conſervantur adhuc; ut ſi quis velit, ibi conſuli & cum edito *Commercio Epiſtolico* comparari poſſint. Illud interim ſubmonendus eſt *Leibnitius*; cum id Societati impingit, quaſi inauditum eum condemnatum îſſet, id ob eam rem per ſtatutum ejus quoddam commeritum ſe eſſe, ut nomen ejus inde expungatur.

Philoſophia porro, quam in *Principiis* ſuis atque *Opticis Newtonus* excoluit, eſt Experimentalis: illa ſcilicet, quæ *Cauſas* rerum non fidentius docet, quam per Experimenta confirmari queant; neque implenda eſt Opinationibus, quæ per Phænomena nequeunt probari. Et idcirco in *Opticis* ſuis, res experimentis firmatas ab illis quæ incertæ

 ad-

adhuc manent, diſtinxit *Newtonus*: & incertas aliquot ejuſmodi ſub finem Opticorum ut *Quærenda* propoſuit. Eandemque ob cauſam, in *Principiorum* præfatione, cum memoraſſet Motus Planetarum, Cometarum, Lunæ ac Maris, ceu in libro illo de Gravitatis theoria deductos, hæc addidit: *Utinam cætera Naturæ Phænomena ex Principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil ſuſpicer, ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas, vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum regulares figuras cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt.* Et ſub finem ejus Libri, in ſecunda Editione, narrat; ut præ inopia Experimentorum tanto negotio ſufficientium non aggreſſus ſit Leges Actionum illius Spiritus ſive Agentis deſcribere, per quem efficitur hæc Attractio. Quin & eandem ob cauſam de *Gravitatis Cauſa* nihil pronuntiat; quod nulla Experimenta ſive Phænomena ad manum eſſent, quæ cauſam illam certo indicare poſſent. Atque hoc in *Principiis* ſuis, ſub ipſo initio, abunde declaraverat, his verbis: *Virium cauſas & ſedes Phyſicas jam non expendo.* Et paulo poſt: *Voces Attractionis, Impulſus vel Propenſionis cujuſcunque in centrum indifferenter & pro ſe mutuo promiſcue uſurpo, has Vires non Phyſice ſed Mathematice tantum conſiderando. Unde caveat Lector ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis, cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel Centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere & phyſice tribuere, ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.* Et ſub finem Optices: *Qua cauſa efficiente hæ attractiones* [ſc. gravitas, viſque magnetica & electrica] *peragantur, hic non inquiro. Quam ego attractionem appello, fieri ſane poteſt ut ea efficiatur*

impulſu

impulsu vel alio aliquo modo nobis incognito. Hanc vocem Attractionis ita hic accipi velim, ut in universum solummodo vim aliquam significare intelligatur qua corpora ad se mutuo tendant, cuicunque demum causæ attribuenda sit illa vis: Nam ex Phænomenis naturæ illud nos prius edoctos esse oportet quænam corpora se invicem attrahant, & quænam sint leges & proprietates istius attractionis, quam in id inquirere par sit, quanam efficienti causa peragatur attractio. Pauloque inferius, easdem Attractiones tamquam vires considerat, quas in rerum Natura existentiam habere, licet causæ earum nondum sint cognitæ, per Phænomena constat: distinguitque eas a Qualitatibus occultis, quæ a specificis rerum formis fluere existimantur. Et in Scholio sub extremum *Principiorum*, cum Gravitatis proprietates memorasset, hæc addidit: *Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, Hypothesis vocanda est; & Hypotheses, seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum occultarum, seu Mechanicæ, in Philosophia experimentali locum non habent. ——— Satis est quod Gravitas revera existat, & agat secundum leges a nobis expositas, & ad Corporum cælestium & Maris nostri motus omnes sufficiat.* Jam vero, post hæc omnia quæ consulto præmonuerat *Newtonus*, quis non miretur, ideo eum a quoquam sugillari, quod Causas Gravitatis aliarumque Attractionum non per Hypotheses explicet? quasi criminis loco esset; certis esse contentum, incerta vero dimittere. Et tamen *Actorum Eruditorum* (anno 1714 mense Martio p. 141, 142) Editores id *Newtono* exprobrant, quod causam Gravitatis neget esse Mechanicam; asseruntque, si Spiritus ille vel Agens, quo Electrica fit Attractio, non sit Æther vel subtilis Cartesii Materia, quavis id Hypothesi contemtius esse; ut fortasse sit Principium

Hen-

Henrici Mori Hylarchicum. Quin & ipse *Leibnitius*, in tractatu *De bonitate Dei*, & in Epistolis ad *Hartsoekerum* atque alibi, *Newtono* id vitio vertit, quasi Gravitatem faceret Naturalem quandam & Essentialem corporum Proprietatem, immo occultam Qualitatem, ac denique Miraculum. Atque hujusmodi cavillationibus, homines hi conterraneis suis persuasum esse cupiunt, judicio eum & acumine parum valere; neque eum esse qui Methodum Infinitesimalem rem tam arduam invenire potuisset.

Illud profecto confitendum est, in Philosophia tractanda *Newtonum* inter & *Leibnitium* plurimum interesse. Prior ille eo usque progreditur, quo Phænomenorum & Experimentorum evidentia eum ducit; & ubi illa deficit, pedem sistit: posterior Hypothesibus suis scatet totus; easque proponit non Experimentis examinandas, sed clausis oculis credendas. Ille, inopia Experimentorum, quæ Causam Gravitatis certo indicare possint, utrum Mechanica fuerit necne, non affirmat: Hic, si Mechanica non sit, *Perpetuum* esse *Miraculum* pronuntiat. Ille (atque id quoque non definiens sed quærens) Creatoris Potentiæ tribuit, quod minimæ quæque Materiæ partes sint duræ: Hic illam Materiæ duritiem Conspirantibus quibusdam motibus imputat; &, si causa ejus alia ponatur quam Mechanica, pro *Perpetuo* eam *Miraculo* deridendam propinat. Ille Motum in Homine Animalem, non audet affirmare, mere esset Mechanicum: Hic pure Mechanicum esse audacter asserit; cum ex Hypothesi ejus de *Harmonia præstabilita*, numquam Anima vel Mens hominis sic agat in corpus, ut Motus hujus vel impediat vel adjuvet. Ille Deum asserit, (*Deum in quo vivimus & movemur & sumus*) esse Omnipræsentem, non tamen ut Mundi Animam: Hic, non Mundi quidem Animam esse, sed INTELLIGENTIAM SUPRAMUNDANAM; ex quo illud consequi videa-

tur,

tur, Non posse Deum intra Mundi limites quicquam efficere, nisi per Miraculum prorsus incredibile. Ille Philosophis præcipit, ut à Phænomenis & Experimentis ad eorum causas progrediantur, atque inde ad Causarum istarum Causas, & sic deinceps donec ad Primam Causam perveniatur. Hic omnes causæ primæ actiones pro *Miraculis* haberi, omnesque Leges per Dei Voluntatem, Naturæ impressas pro *Perpetuis Miraculis Occultisque Qualitatibus* censeri; & idcirco ex Philosophia exulare jubet. Siccine vero agitur? An perpetuæ & universales Naturæ leges, si ex potentia Dei, Causæve adhuc nobis incognitæ Actione deriventur, pro *Miraculis* & *Qualitatibus occultis*, hoc est ex ejus sententiâ, pro *Monstris* & *Absurditatibus*, sunt exsibilandæ? Omnia porro pro Dei existentia de Naturæ Phænomenis sumpta Argumenta, idcircóne sunt explodenda; quia *novis* quis ea Nominibus & *Ignominiosis* infamet? An, ut *superstitiosa* & *absurda*, rejicietur Philosophia Experimentalis, quia neque ultra experimenta definire quicquam vult; neque adhuc per Experimenta probare potest, naturæ omnia Phænomena per Causas mere Mechanicas posse solvi? Res profecto digna est, quæ & mature & serio consideretur.

COM-

COMMERCIUM EPISTOLICUM

D. *JOHANNIS COLLINS*,

ET ALIORUM,

DE

ANALYSI PROMOTA:

JUSSU
SOCIETATIS REGIÆ

In lucem editum.

LONDINI: ANNO M DCC XII.

AD LECTOREM.

QUAM ob causam editæ sint hæ Epistolæ Chartulæque collectaneæ, apparebit ex Literis D. Leibnitii *& D.* Keillii *in fine subjunctis. Offensionem attulerant D.* Leibnitio *nonnulla, quæ scripto prodidit D.* Keillius *in Actis* Londinensibus *anno* 1708, *injuriam D.* Newtono *oblatam propulsans. Datis igitur ad Societatis Regalis Secretarium literis, de calumniâ questus D.* Leibnitius, *remedium a Societate petiit; idque eos æquum credidit judicaturos, ut D.* Keillius *culpam suam publicè fateretur. D.* Keillio *ea est pars visa potior, ut ad illa, quæ questus erat D.* Leibnitius, *literis scriptis responderet: Quibus in literis quæ anteà ediderat, & exposuit pleniùs & vindicavit. D.* Leibnitius *nequaquam his satis sibi factum arbitratus, literas alteras ad Societatem dedit; in quibus adhuc de D.* Keillio *questus*, novum *eum* hominem *appellat*, parumque peritum rerum anteactorum cognitorem, nec mandatum ab eo, cujus interesset, habentem; *Societatisque* æquitati committit, annon coercendæ sint vanæ & injustæ vociferationes. Nº I.

Versabatur in Angliâ *D.* Leibnitius *ineunte anno* 1673, *iterumque mense* Octobri 1676; *& interjecto illo temporis intervallo in* Galliâ *egit. Quo omni temporis spatio, mutuis acceptis datisque literis, commercium habuit cum D.* Oldenburgo, &, Oldenburgi *operâ, tandem cum D.* Collinio *itidem, & nonnunquam etiam cum D.* Newtono. *Quid autem ille ex* Anglis *tandem, vel tum cùm* Londini *esset, vel ex literis istis mutuò datis, edidicerit, in eo ferè vertitur hæc omnis quæstio. D.* Oldenburgus & Collinius *jam diù obierunt; D.* Newtonus *autem tum* Cantabrigiæ *egit; parumque amplius novit, quàm quod ex literis ipsius a D.* Wallisio *deinceps editis apparet. D.* Newtonus *neque a D.* Keillii *partibus Testis esse potest, nec D.* Leibnitius *ipse a suis: Alius autem in vivis Testis est nullus. Societas itaque Regalis, a D.* Leibnitio *bis adversus* Keillium *appellata, selectorum ex Societate arbitrorum consessum constituit, qui literas literarumque transcriptarum libellos, aliasque chartulas a D.* Oldenburgo *penes Societatem relictas, & siquid*

inter

inter D. Collinii *schedas repertum huc faceret, perscrutarentur, Sententiamque suam ad Societatem referrent: jussitque tandem ut Sententia illa a selectorum arbitrorum consessu relata, unà cum ipsis literarum aliarumque chartularum excerptis, emitteretur.*

Cùm D. Newtonus *Analysin istam scripto traderet, quæ sub initium horum Collectaneorum impressa est, habuit jam tum † Methodum generalem æquationes finitas in infinitas resolvendi, & æquationes tum finitas tum infinitas applicandi ad Problemata solvenda, ope proportionum Augmentorum momentaneorum Quantitatum nascentium & augescentium. Augmenta hæc appellat D.* Newtonus *Particulas & Momenta; D.* Leibnitius *autem Infinitesimales, Indivisibiles & Differentias. Quantitates augescentes appellat D.* Newtonus *Fluentes; D.* Leibnitius *autem Summas. Et velocitates augmenti appellat D.* Newtonus *Fluxiones; istasque Fluxiones exponit per quantitatum fluentium momenta.*

† De hac Methodo ex Methodis Serierum & Fluentium composita scripsit infra *Newtonus*, N° VI, VII, XXII, XLVII, LIII, LVI.

Quæ pars hujus Methodi in eo sita est, ut æquationes finitæ in infinitas resolvantur, eam cum D. Leibnitio, *rogatu suo, communicavit D.* Newtonus, *literis ad illum datis* Junii 13. & Octobris 24. 1676. *Reliquam hujus Methodi partem, postquam eousque explicuerat ut eam satis * obviam factam existimaret; nè sibi deinceps subriperetur priusquam eam exponere visum foret, literis occultis ita celavit, quo modo aliàs* Galilæus *atque* Hugenius *fecerant. Hujus posterioris partis inventionem sibi vendicat D.* Leibnitius: *D.* Keillius *autem eam D.* Newtono *adserit;* Keillioque *suffragatur Sententia selectorum e Societate arbitrorum consessûs. Alios tamen Exteros, qui methodum istam a D.* Leibnitio *acceperint aut aliter obtinuerint, nihil quidquam in his Collectaneis est quod ullo pacto afficiat. Illi, quid inter D.* Leibnitium *& D.* Oldenburgum *commercii esset, ignorabant. Illis, quòd Methodum, quam utilem esse compererant, in rem suam adhibuerint atque excoluerint; id verò laudi est dandum.*

* Vid. N° LIII.

Subjunctæ sunt Epistolis Annotationes quædam; quò Lectores, quibus minus est otii, & Epistolas inter se faciliùs conferre, & semel perlectas intelligere queant.

COM-

Commercium Epistolicum

D. JOHANNIS COLLINS,

ET ALIORUM,

De ANALYSI promota:

Jussu *SOCIETATIS REGIÆ*

in lucem editum.

Excerpta ex Epistola reverendi viri D. Isaaci Barrow *ad D.* J. Collins, Cantabrigiæ 20 Julii 1669 *datâ, cujus habetur Autographon.* N° I.

*AMICUS quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nudiustertius chartas quasdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimensiones supputandi Methodos, *Mercatoris* methodo pro Hyperbola similes, maxime vero Generales, descripsit, simulque Æquationes resolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to these Things, brought me the other Day some Papers, wherein he hath set down Methods of calculating the Dimensions of Magnitudes, like that of Mr. *Mercator* for the Hyperbola, but very general, as also of Resolving Equations, which I suppose will please you, and I shall send them by the next.

Ex Epistola ejusdem ad eundem, 31 Julii 1669 *data, pariterque ipsius* Barrovii *manu scripta.*

* Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti spero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæso, quum eas quantum tibi visum fuerit perlegeris; id enim postulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igitur, obsecro, te eas recepisse fac me certiorem, quod illis metuo, quippe qui eas per Veredarium publicum ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gererem quam citissime.

* I send you the Papers of my Friend I promis'd, which I presume will give you much Satisfaction: I pray, having perused them so much as you think good, remand them to me, according to his desire, when I ask'd him the Liberty to impart them to you; I pray give me Notice of your receiving them, with your soonest Convenience, that I may be satisfied of their Reception; because I am afraid of them, venturing them by the Post, that I may not longer delay to correspond with your desire.

Ex Epistola ejusdem ad eundem, 20 Aug. 1669 *data, cujus etiam comparet Autographon.*

† Amici chartas tibi placuisse gaudeo; est illi nomen *Newtonus,* Collegii nostri Socius, & juvenis, (secundus enim, ex quo Artium Magistri gradum cepit, jam agitur annus,) & qui, eximio quo est acumine, permagnos in hac re progressus fecit. Illas, si vis, cum Nobili Domino Vicecomite *Brounkero* communica.

† I am glad my Friend's Paper gives you so much Satisfaction; his Name is Mr. *Newton,* a Fellow of our College, and very young (being but the second Year Master of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in these Things; you may impart the Papers, if you please, to my Lord *Brounker.*

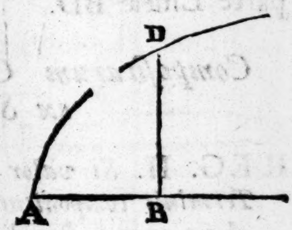
Exem-

Exemplar dictarum chartarum, manu D. Collins *exaratum & in scriniis ejus repertum, quod cum ipsius D.* Newtoni *Autographo collatum ad verbum consentire invenimus. Hujus autem titulus est* N° II.

DE ANALYSI PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REG. I. *Si* $ax^{\frac{m}{n}}=y$; *erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Area ABD.*

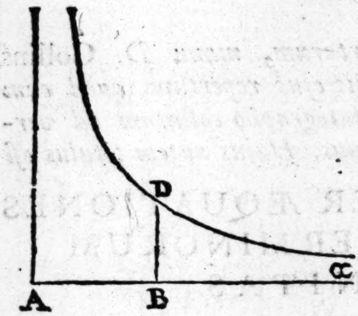
Res Exemplo patebit.

1. Si x^2 $(=1x^{\frac{2}{1}})=y$, hoc est, $a=1=n$, & $m=2$; Erit $\frac{1}{3}x^3=$ABD.

2. Si $4\sqrt{x}\,(=4x^{\frac{1}{2}})=y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\,(=\frac{8}{3}\sqrt{x^3})=$ABD.

3. Si $\sqrt[3]{x^5}\,(=x^{\frac{5}{3}})=y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\,(=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8})=$ABD.

4. Si $\frac{1}{x^2}\,(=x^{-2})=y$, id est, si $a=1=n$, & $m=-2$;



Erit ($\frac{1}{-1}x^{-\frac{1}{1}}$ =) $-x^{-1}$ ($= -\frac{1}{x}$) $= \alpha$BD, infinite versus α protensæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ($= x^{-\frac{3}{2}}$) $= y$; Erit ($\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}} =$) $\frac{2}{-\sqrt{x}} =$ BDα.

6. Si $\frac{1}{x}$ ($= x^{-1}$) $= y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

Nº III. REG. II. *Si valor ipſius* y *ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*

Exempla Prima.

Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

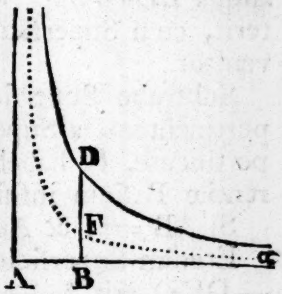
Etenim ſi ſemper ſit $x^2 =$ BF, & $x^{\frac{3}{2}} =$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per Lineam BF, & $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic ſi $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et ſi $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

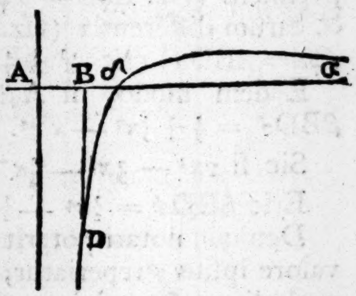
Exempla Secunda.

Si $x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$.
Vel si $x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$.



Quarum signa si mutaveris, habebis Affirmativum valorem ($x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei αBD, modo tota cadat supra basim $AB\alpha$.

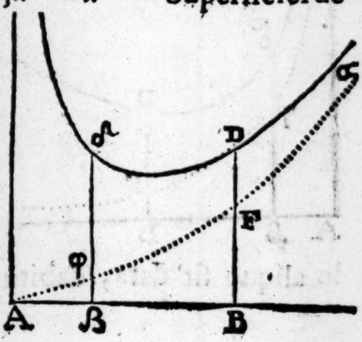
Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decussat suam Basin inter B & α, ut hic vides in δ,) ista parte a parte superiori subducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, & adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla Tertia.

Si $x^{2}+x^{-2}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^{3}-x^{-1}=$ Superficiei descriptæ. Sed hic notandum est, quod dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere Lineæ BD.

Nempe, posito $x^{2}=BF$, & $x^{-2}=FD$; Erit $\frac{1}{3}x^{3}=ABF$ Superficiei per BF descriptæ & $-x^{-1}=DF\alpha$ Superficiei descriptæ per DF.



Et hoc ſemper accidit cum Indices $(\frac{m+n}{n})$ rationum Baſis x in valore Superficiei quæſitæ, ſint variis ſignis affecti. In hujuſmodi Caſibus, pars aliqua BD$\delta\beta$ Superficiei media (quæ ſola dari poterit, cum Superficies ſit utrinque infinita) ſic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Baſin Aβ pertinentem, a Superficie ad majorem Baſin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Baſium inſiſtentem. Sic in hoc Exemplo.

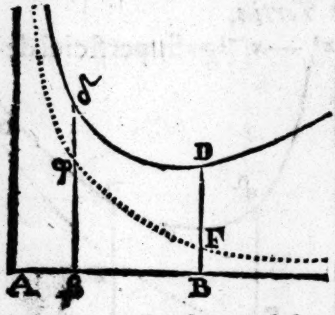
Si AB $=2$, & A$\beta = 1$; Erit βBD$\delta = \frac{17}{6}$:

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF —DFα) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ ſive $\frac{13}{6}$; & Superficies ad Aβ pertinens (viz. A$\varphi\beta$ — $\delta\varphi\alpha$) erit $\frac{1}{3} - 1$, ſive $-\frac{2}{3}$: & earum differentia (viz. ABF — DFα — A$\varphi\beta$ + $\delta\varphi\alpha = \beta$BD$\delta$) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ ſive $\frac{17}{6}$.

Eodem modo, ſi A$\beta = 1$, & AB $= x$; Erit βBD$\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic ſi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, & A$\beta = 1$; Erit βBD$\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit quod ſi quantitas x^{-1} in valore ipſius y reperiatur; iſte Terminus (cum Hyperbolicam ſuperficiem generat) ſeorſim a reliquis conſiderandus eſt.



Ut ſi $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$: Sit $x^{-1} =$ BF, & $x^2 + x^{-3} =$ FD, ac A$\beta = 1$; Et erit $\delta\varphi$ FD $= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-1}$ generatur.

Quare, ſi reliqua Superficies $\beta\varphi$FB, quæ Hyperbolica eſt, ex Calculo aliquo ſit data, dabitur tota βBDδ.

Alia

Aliarum Omnium Quadratura.

REG. III. *Sin valor ipsius* y, *vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes resolvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.* N° IV.

Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x}=y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x)\,aa+0\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$0-\frac{aax}{b}+0$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$

$$0+\frac{aax^2}{b^2}+0$$

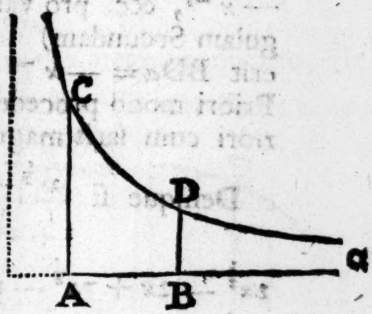
$$+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3}$$

$$0-\frac{aax^3}{b^3}+0$$

$$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$$

$$0+\frac{aax^4}{b^4}$$

&c.



Et

Et sic vice hujus $y=\frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. serie istac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$, &c. infinitæ etiam seriei, cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modo x sit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx}=y$, Dividendo prodibit

$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8$, &c. Unde (per Regulam Secundam)

erit ABDC $=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$, &c.

Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo $xx+1$), prodibit $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$, &c. pro valore ipsius y; Unde (per Regulam Secundam)

erit BD$a=-x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{5}x^{-5}+\frac{1}{7}x^{-7}$, &c. Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.

Denique si $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=y$; Dividendo prodit

$2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit

ABDC $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{3}x^3$ &c.

Exem-

Exempla Radicem Extrahendo.

Si sit $\sqrt{aa+xx}=y$, Radicem sic extraho, N° V.

$$aa+xx\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\right. \text{ \&c.}$$

$$aa$$

$$o+xx.$$

$$xx+\frac{x^4}{4a^2}$$

$$o-\frac{x^4}{4a^2}$$

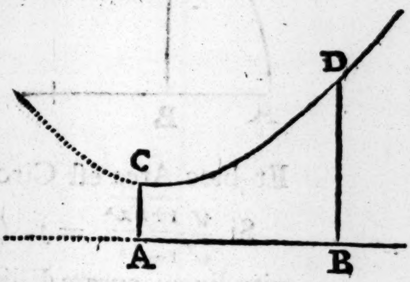
$$-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}$$

$$o+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$$

$$+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

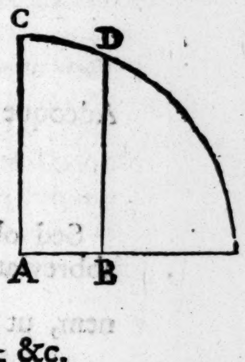
$$o-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

&c.



Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa+xx}=y$, nova producitur, viz. $y=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæsita ABDC erit $=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.

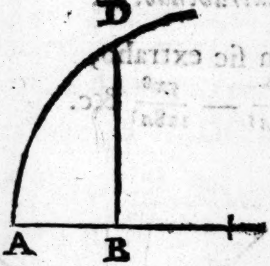


Eodem modo, si sit $\sqrt{aa-xx}=y$, ejus Radix erit $a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c.

Adeoque Area quæsita ABDC erit æqualis $ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Et hæc est Quadratura Circuli

Vel si ponas $\sqrt{x-xx}=y$; erit Radix æqualis infinitæ seriei



seriei $x^{\frac12} - \frac12 x^{\frac32} - \frac18 x^{\frac52} - \frac1{16} x^{\frac72} - \frac5{128} x^{\frac92}$ &c.

Et Area quæsita ABD æqualis erit $\frac23 x^{\frac32} - \frac15 x^{\frac52} - \frac1{28} x^{\frac72} - \frac1{72} x^{\frac92} - \frac5{704} x^{\frac{11}2}$ &c.

sive $x^{\frac12}$ in $\frac23 x - \frac15 x^2 - \frac1{28} x^3 - \frac1{72} x^4 - \frac5{704} x^5$ &c.

Et hæc Area est Circuli quadratura.

Si $\frac{\sqrt{1+az^2}}{\sqrt{1-b^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ;) Extrahendo radicem utramque prodit

$$\frac{1 + \frac12 ax^2 - \frac18 a^2x^4 + \frac1{16} a^3x^6 - \frac5{128} a^4x^8}{1 - \frac12 bx^2 - \frac18 b^2x^4 - \frac1{16} b^3x^6 - \frac5{128} b^4x^8} \text{ \&c.}$$

Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{llllll}
1 & +\frac12 bx^2 & +\frac38 b^2x^4 & +\frac5{16} b^3x^6 & +\frac{35}{128} b^4x^8 & \text{\&c.} \\
 & +\frac12 a & +\frac14 ab & +\frac3{16} ab^2 & +\frac5{32} ab^3 & \\
 & & -\frac18 a^2 & -\frac1{16} a^2b & -\frac3{64} a^2b^2 & \\
 & & & +\frac1{16} a^3 & +\frac1{32} a^3b & \\
 & & & & -\frac5{128} a^4 &
\end{array}$$

Adeoque Aream quæsitam

$$\begin{array}{llll}
x & +\frac16 bx^3 & +\frac3{40} b^2x^5 & \text{\&c.} \\
 & +\frac16 a & +\frac1{20} ab & \\
 & & -\frac1{40} a^2 &
\end{array}$$

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$.

Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4}}{1-bx^2} = y$, & reliquum o-

pus

us perficitur extrahendo Radicem Numeratoris ntum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi uemlibet valorem ipſius y (quibuſcunque Radiciis vel Denominatoribus ſit perplexus, ut hic videre eſt; $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[2]{2x-x^{\frac{2}{3}}}}$ $= y$) in ſeries, Infinitas ſimplicium Terminorum, x quibus, per Regulam Secundam, quæſita Suerficies cognoſcetur.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

Numeralis Æquationum affectarum Reſolutio.

Quia tota difficultas in Reſolutione latet, mo- Nº VI.
um quo ego utor in Æquatione Numerali priuum illuſtrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, reſolvenda: Et ſit 2, numeus qui minus quam decima ſui parte differt a Radice quæſita. Tum pono $2 + p = y$, & ſubſtiuo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde ova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Raix p exquirenda eſt, ut quotienti addatur: Neme (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, ive $p = 0{,}1$ prope veritatem eſt; itaque ſcribo ,1 in quotiente, & ſuppono $0{,}1 + q = p$, & hunc jus valorem, ut prius ſubſtituo, unde prodit $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$.

$y^3 -$

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$ $+0,06+1,2+6,0$ $+1,+10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$ $-0,060642+11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,$
$-0,00004854+s=r$		

Et cum $11,23q+0,061=0$ veritati prope acc dit, sive fere sit q æqualis $-0,0054$ (dividendo ne pe donec tot eliciantur Figuræ, quot locis prim Figuræ hujus & principalis quotientis exclusi distant) scribo $-0,0054$ in inferiori parte quot entis, cum negativa sit.

Et supponens $-0,0054+r=q$, hunc ut pr us substituo, & operationem sic produco quo u que placuerit. Verum si ad bis tot figuras tan tum quot in quotiente jam reperiuntur una demp ta, operam continuare cupiam, pro q substitu $-0,0054+r$ in hanc $6,3q^2+11,23q+0,061$, sci licet primo ejus termino (q^3) propter exilitaten suam neglecto, & prodit $6,3r^2+11,16196r+$ $0,000541708=0$, fere, sive (rejecto $6,3r^2$) $r=$ $\frac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo $2,09455147$ Quotientem quæsitam.

Æqua-

Æquationes plurium dimensionum nihilo se-us resolvuntur, & operam sub fine, ut hic factum it, levabis, si primos ejus terminos gradatim o-isseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, dubitarem an $0,1 = p$ veritati satis accederet, pro $p - 1 = 0$, finxissem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & ejus dicis primam figuram in Quotiente scripsissem; secundam vel tertiam Quotientis figuram sic plorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo sultante quadratum coefficientis penultimi ter-ini, non sit decies majus quam factus ex ultimo rmino ducto in coefficientem termini antepenul-mi.

Imo laborem plerumque minues, præsertim in quationibus plurimarum dimensionum, si figu-s omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc t extrahendo minorem radicum, ex tribus ulti-is terminis Æquationis novissime resultantis) ex-iras: Isto enim modo figuras duplo plures qua-et vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervul-ta an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis nplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ipso modo operandi patet, unde cum opus sit, memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Ter-ini desint, eadem fere facilitate tractantur; & quatio semper relinquitur, cujus Radix una cum quisita Quotiente adæquat Radicem Æquationis imo propositæ. Unde Examinatio Operis hic que poterit institui ac in reliqua Arithmetica, ferendo nempe Quotientem a Radice primæ quationis (sicut Analystis notum est) ut Æqua-o ultima vel Termini ejus duo tresve ultimi roducantur inde. Quicquid laboris hic est, istud Operatione substituendi quantitates unas pro a-is reperietur: Id quod varie perficias, at sequen-

tem

tem modum maxime expeditum puto, præserti[m] ubi Numeri Coefficientes constant ex pluribus F[i]guris.

Sit $p + 3$ substituenda pro y in hanc $y^4 - 4y^3$ [+] $5y^2 - 12y + 17 = 0$. Et cum ista possit resolvi [in] hanc formam

$\overline{\overline{\overline{y - 4}\, x\, y + 5}\, x\, y - 12}\, x\, y + 17 = 0$. Æquatio n[o]va sic generabitur $p - 1$ in $p + 3 = p^2 + 2p -$ [3] & $p^2 + 2p + 2$ in $p + 3 = p^3 + 5p^2 + 8p + 6$. [&] $p^3 + 5p^2 + 8p - 6$ in $p + 3 = p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 1$[8p] $- 18$. & $p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1 = 0$, q[uæ] quærebatur.

Literalis Æquationum affectarum Resolutio.

N° VII. His in numeris sic ostensis: Sit Æquatio lite[ra]lis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, resolvenda.

Primum inquiro valorem ipsius y cum x sit nu[l]la, hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis [y^3] $+ a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio esse $+ a$. Itaq[ue] scribo $+ a$ in Quotiente, & supponens $+ a + p =$ [y] substituo pro y valorem ejus, & Terminos in[de] resultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, &c.) margini app[o]no; Ex quibus assumo $+ 4a^2p + a^2x$ terminos [u]tique ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensi[o]num, & eos nihilo fere æquales esse suppono sive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et scribe[ns] $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; [&] terminos inde resultantes iterum in margine scr[i]bo, ut vides in annexo schemate, & inde assum[o] Quantitates $+ 4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q [&] x seorsim sunt minimarum dimensionum, & fing[o] $q = \frac{xx}{64a}$ fere, sive $q = + \frac{xx}{64a} + r$; & adnectens [+] $\frac{xx}{64a}$ Quotienti, substituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & sic pr[o]cedo quo usque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0.$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \;\&c.$$

$-a + p = y$	$+y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+a^2y$	$+a^3 + a^2p$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = q$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x \quad +4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 \quad +axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} (+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$$

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis noviſſime reſultantis miſſo, & iſta etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q$, &c.) margini adſcriptos ut vides ſubſtituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis ($\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + \frac{9}{32}x^2r$

$-\frac{1}{2}axr - 4a^2r$) Æquationis inde resultantis, fact divisione $4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2$) $- \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$ (eli- cio $+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens ista ($a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c. pe Regulam secundam dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2}$ $+ \frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro Area quæsita, quæ ad verita- tem tanto magis accedit, quanto x sit minor.

Alius modus easdem Resolvendi.

Nº VIII. Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem acce- dere debet quanto x sit major; Exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc re- soluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in qui- bus x & y vel seorsim, vel simul multiplicatæ, sunt & plurimarum, & æqualium ubique dimensionum, & ex iis quasi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio esse x, & in Quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotien- te scribo. Denique pono $x + p = y$, & sic proce- do ut in priori Exemplo, donec habeam Quotien- tem $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque * Aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \left|\overline{\frac{aa}{64x}}\right| - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ secundæ. Luci gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum

* N. B. eodem sensu quo *Newtonus* utitur symbolo $\left|\overline{\frac{aa}{64x}}\right|$ *Leibni- tius* utitur Symbolo $S\frac{aa}{64x}$.

priori,

priori, modo x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud Reſolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem $\left(\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}\right.$ &c.) terminatur ad Curvam quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales $(x - \frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facile invenies. Idem ſemper notandum eſt cum Area deſignatur terminis plus pluſque diviſis per x continue, præterquam quod vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis compoſita.

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo ſequentia. N° IX.

1. Si quando accidit quod valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0. \text{ Sit } cc=3b^2+a^2.$$

$$y=b-\frac{abx}{c^2}+\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}-\frac{a^5bx^3}{c^8}+\frac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}, \text{ \&c.}$$

$b+p=y$	$+y^3$	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}-\frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+ccp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$

$$c^2+ax-\frac{6ab^2x}{c^4}\Big)\frac{a^4bx^2}{c^4}+x^2+\frac{a^4b^3x^3}{c^6}\Big(-\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8} \text{ \&c.}$$

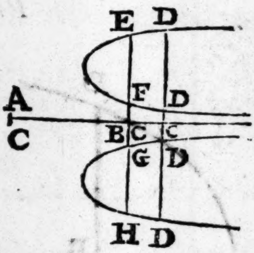
Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſupra reſolvo; & radicem ejus pro b ſubſtituo.

2. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt ſi in æquatione reſolvenda nullus ſit terminus niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hac $y^3-axy+x^3=0$; tum terminos $(-axy+x^3)$ ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim ſi fieri poteſt, alias per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a}$ $+p$ pro y ſubſtituendum. In hac y^3-a^2y+axy $-x^3=0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y-x^3$, vel ex y^3-a^2y elicere.

3. Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hac y^4+ $y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$, augeo vel

vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.

Sic in annexo schemate, cum AC (x) nulla est, tum CD (y) est imaginaria.

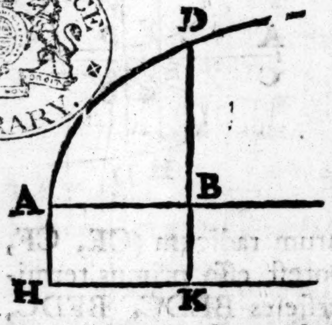


Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum posito quod BC (x) sit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet potest esse primus terminus quotientis, prout superficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC desideratur. In aliis etiam casibus, si quando hæsitas, te hoc modo extricabis.

Denique si index potestatis ipsius x vel y sit fractio, reduco ipsum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Positio $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, resultabit $v^6 - z^3 v + z^4 = 0$, cujus radix est $v = z + z^3$, &c. sive (restituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & superficie solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime. Nº X.

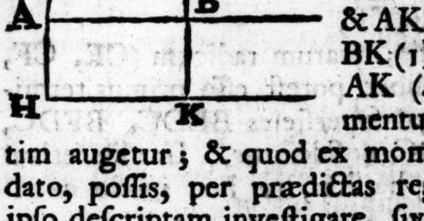
Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.



Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita * rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quod BK (1) sit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum area AK (x) momento 1 descripta conferre.

Jam qua ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longitudinis Curvarum invenire.



Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & posito AE $=1=2$ AC. † Erit ut BK sive GH, momentum Basis AB (x), ad HD momentum

* N. B. Hic describitur Methodus per Fluentes & earum Momenta. Hæc Momenta a D. *Leibnitio* Differentiæ postmodum vocata sunt: Et inde nomen *Methodi Differentialis.*

† Exemplum calculi per Momenta fluentium.

Ar

Arcus AD : : BT : DT : : BD ($\sqrt{x-xx}$): DC($\frac{1}{2}$) : : 1 (BK): $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ est momentum Arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Quare per regulam secundam, longitudo Arcus AD est $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c. sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c.

Non secus ponendo CB esse x, & radium CA esse 1, invenies Arcum LD esse $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, *&c.*

Sed notandum est quod unitas ista quæ pro momento ponitur, est Superficies cum de Solidis, & linea cum de superficiebus, & punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

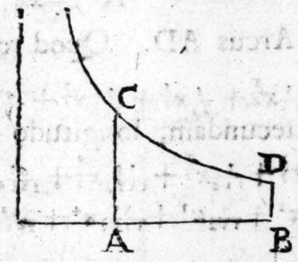
Nec vereor loqui de unitate in punctis, sive lineis infinite parvis, si quidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indivisibilium.

Ex his fiat conjectura de superficiebus & quantitatibus solidorum, ac de Centris Gravitatum.

Invenire prædictorum conversum.

Verum si e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data, longitudo Basis AB desideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

Inventio Basis ex Area data.



Ut si ex area ABDC Hyperbolæ $\left(\frac{1}{1+x}=y\right)$ data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$ &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.

Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ extraho.

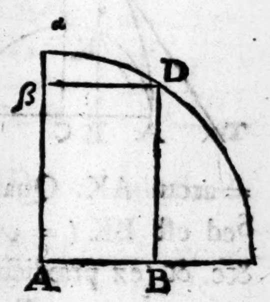
$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.		
$z+p=x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4-z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3+z^2p+zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2-zp-\frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{4}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4+z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3-zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2+q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1-z+\frac{1}{2}z^2)\,\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5\,(\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$		

Analyſin ut vides exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

1. Quod inter ſubſtituendum, iſtos terminos ſemper omitto quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantum poſt z^3. Cum radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; Quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum, quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis a ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

2. Cum videam p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſime reſultante eſſe unius tantum dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos terminos quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Baſis ex data Longitudine Curvæ.



Si ex dato arcu αD Sinus AB deſideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. ſupra inventæ, (poſito nempe AB $= x$, αD $= z$, & A$\alpha = 1$,) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea ſi Coſinum Aβ ex iſto arcu dato cupis, fac

$A\beta \left(= \sqrt{1-xx}\right) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces, dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2x3, 4x5, 6x7, 8x9, 10x11, &c.

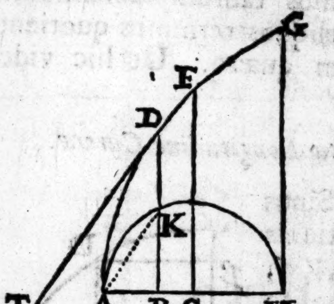
Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1x2, 3x4, 5x6, 7x8, 9x10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos, $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c. Et sic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

Et hæc de Curvis Geometricis dicta sufficiant. Quinetiam Curva etiamsi Mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.

Nº XI.



Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua describitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam posito AB = x, BD = y, ut supra, & AH = 1; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est KD = arcui AK. Quare tota BD = BK + arc. AK. Sed est BK $\left(= \sqrt{x-xx}\right) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c. & (ex prædictis) arcus AK $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}$

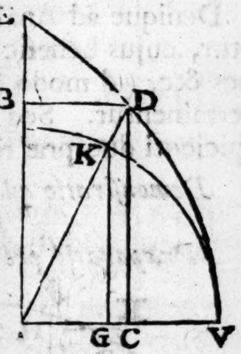
—

$-\frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

Vel brevius sic : Cum recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x-xx} : : 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, & CB $= x$) obtinebis aream CBDF, &c.

Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG : : AB (x) : BD (y), sive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadratricis est BA (= DC) = arcui VK, sive VK $= x$.



Quare posito AV $= 1$, erit GK $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex supra ostensis, & GA $= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

Adeoque $y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6}$ &c. sive, divisione facta, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area AVDB $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est.

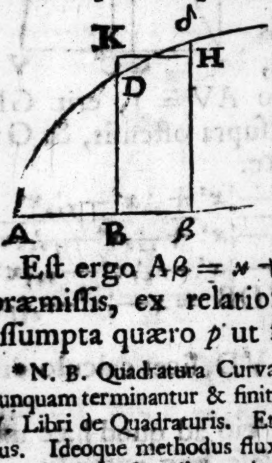
Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus, idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad Curvas Mechanicas (si quando id non

non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analyſis per æquationes ex finito terminorum numero conſtantes (quando id ſit poſſibile) perficit, hæc per æquationes infinitas ſemper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analyſis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa ſunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec deſignare neque ita concipere poſſimus, ut quantitates inde deſideratas exacte cognoſcamus: Sicut radices ſurdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita poſſunt exhiberi, ut alicujus quantitas a reliquis diſtincta exacte cognoſcatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere cenſeatur, cujus beneficio Curvarum areæ & longitudines &c. (id modo fiat) *exacte & Geometrice determinentur. Sed iſta narrandi non eſt locus. Reſpicienti duo præ reliquis demonſtranda occurrunt.

1. *Demonſtratio quadraturæ curvarum ſimplicium in Regula prima.*

Præparatio pro Regula prima demonſtranda.



Nº XII.

† Sit itaque curvæ alicujus ADδ Baſis AB $= x$, perpendiculariter applicata BD $= y$, & area ABD $= z$, ut prius. Item ſit B$\beta = o$, BK $= v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale ſpatio B$\beta\delta$D.

Eſt ergo A$\beta = x + o$, & A$\delta\beta = z + ov$. His præmiſſis, ex relatione inter x & z ad arbitrium aſſumpta quæro y ut ſequitur.

* N. B. Quadratura Curvarum per Æquationes infinitas, quæ nonnunquam terminantur & finitæ evadunt. Eadem explicatur in Prop. V. Libri de Quadraturis. Et propoſitio illa pendet a quatuor prioribus. Ideoque methodus fluxionum & momentorum, quatenus habetur in Propoſitionibus quinque primis Libri de Quadraturis *Newtono* innotuit Anno 1669.

† Exemplum luculentum Calculi per momenta Fluentium.

Pro

Pro lubitu ſumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, ſive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. *Tum $x + o$ (Aβ) pro x, & $z + ov$ (A$\delta\beta$) pro z ſubſtitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^3 + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et ſublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + + ov^2$. Si jam ſupponamus B$\beta$ in infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evaneſcent, quare reſtabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx$ $(=zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\, y$. Quare e contra ſi $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonſtratio.

Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m + n = p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}} = z$. ſive $c^nx^p = z^n$: * tum $x + o$ pro x, & $z + ov$ (ſive, quod perinde eſt, $z + oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$; &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis c^nx^p & z^n æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^npx^{p-1} = nyz^{n-1}$ $(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^nx^p}{cx^{\frac{p}{n}}})$ ſive dividendo per c^nx^p, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$, ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$: vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m + n$ pro p, hoc eſt, m pro $p - n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

* *Leibnitius* ſcribit dx pro o vel $o \times 1$, dz pro ov vel oy.

In-

Inventio Curvarum quæ possunt quadrari.

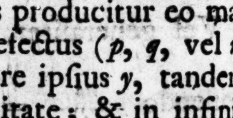
Hinc in transitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, * possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & basin x, ut inde quæratur applicata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et sic de reliquis.

2. Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.

Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quod Quotiens, cum x sit satis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum p, q, r, &c. sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4$, &c. Et x^2 dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, &c. Itaque si $x \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3$, &c. Et x^2 plusquam dimidium omnium $x^2 + x^3 +$



x^4, &c: Sic si $\frac{x}{b} \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium

* Hac propositione ex æquatione Fluentes involvente inveniuntur Fluxiones.

omnium $x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{bb}$, &c. Et ſic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decreſcunt perpetuo, vel ſi quando increſcant, tantum opus eſt ut x aliquoties adhuc minor ſupponatur.

2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evaneſcat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino ſimul evaneſcat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decreſcit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evaneſcat.

4. Sed valores iſtarum p, q, vel r, &c. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propoſitæ. (Sic in reſolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ ſupra oſtenſa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde ſatis liquet propoſitum quod quotiens infinite producta eſt una ex valoribus de y.

Idem patebit ſubſtituendo quotientem pro y in æquatione propoſita. Videbis enim terminos illos ſeſe perpetuo deſtruere in quibus x eſt minimarum dimenſionum.

Excerpta ex Epiſtola D. Oldenburgh *ad D.* Renatum Franciſcum Sluſium *Canonicum* Leodienſem, *Anno* 1669, 14 Septembris St. vet. *datâ : cujus Apographum conſpicitur in Libro* Societatis Regiæ, *quo conſervantur Epiſtolæ*, *N°* 3. *p.* 174. N° XIII.

INſuper communicavit ille [*Barrovius*] univerſalem Methodum Analyticam, ipſi tranſmiſſam a D. *Iſaaco Newtono*, inſervientem menſurandis Areis omnium ejuſmodi Curvarum, & earundem Perimetrorum, in quibus Ordinatæ eandem habet com-

communem habitudinem ad Basin: Hæcque methodus alia non est ab illa, quam particulariter applicuit D. *Mercator* ad inveniendas areas Hyperbolæ, universalis reddita. Auctor sic incipit.

" *De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas.*

" Methodum generalem, quam de Curvarum
" quantitate per Infinitam terminorum seriem men-
" suranda, olim excogitaveram, &c.

Et postquam ejus beneficio ostendit complurium Curvarum Quadraturam, accedit ad Circulum; & convertendo $\sqrt{aa+bb}$, vel $\sqrt{aa-bb}$ in Seriem infinitam, ostendit complures ejusmodi Series applicari posse ad Circulum, adeo ut datis horum quibuslibet duobus; Radio nempe, Sinu, Arcu, & Area Segmenti, reliquorum quodvis inveniri possit infinite verum: (res ni fallor ab omnibus Auctoribus prægressis valde expetita) Ejusdem etiam adminiculo eximie facilitavit inventionem Radicis Æquationis cujuslibet, & mediarum Proportionalium; & Seriem largitur ad inveniendam lineæ Ellipticæ longitudinem. Similiter, ut ostenderet methodum suam ad Curvas mechanicas earumque Tangentes se porrigere, quadrat Cycloidem ejusque portiones; Areamque curvæ Quadratricis, ejusque Perimetrum invenit: Atque ad calcem sic ait.

" Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc
" Methodus, idque variis modis, sese non exten-
" dat. Imo Tangentes ad Curvas mechanicas (si
" quando id non alias fiat) hujus ope ducuntur.
" Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes
" ex finito terminorum numero constantes (quan-
" do id sit possibile) perficit, hæc per Æquatio-
" nes infinitas semper perficiat.

" Et hæc de Areis Curvarum investigandis di-
" cta sufficiant. Imo cum Problemata de Cur-

varum

" varum Longitudine, de quantitate & Superficie
" Solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt
" eo tandem reduci ut quæratur quantitas Super-
" ficiei planæ linea curva terminatæ, non opus
" est quicquam de iis adjungere.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Jacobum Gregorium *Anno* 1669, 25 Novemb. *datâ. Quæ quidem Epistola, manu dicti D.* Collins *descripta, conservata est.* N° XIV.

BArrovius provinciam suam publice prælegendi remisit cuidam nomine *Newtono* Cantabrigiensi, cujus, tanquam viri acutissimo ingenio præditi, in Præfatione Prælectionum Opticarum, meminit: quique antequam ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, eandem Methodum adinvenerat, eamque ad omnes Curvas generaliter, & ad Circulum diversimode, applicarat.

Ex Epistola D. Jacobi Gregorii *ad D.* J. Collins, *ad Fanum Sti.* Andreæ *apud* Scotos *Anno* 1670, 20 Aprilis *datâ, prout in Autographo ipsius* Gregorii *legitur.* N° XV.

SEriem a te missam de Circuli Zona intelligere nequeo, nempe $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7}$ — &c. Si hæc recte descripta sit, Seriem legitimam non esse suspicor.

Ex Epistola ejusdem Gregorii *ad eundem, Anno* 1670, 5 Septemb. *data.* N° XVI.

BArrovii [Geometricas] Lectiones summa cum voluptate & attentione perlegi; atque omnes qui unquam hisce de rebus scripserunt infinito inter-

tervallo superasse comperio. Ex ejusdem [*Barrovii*] methodis Tangentes ducendi cum quibusdam e propriis collatis, inveni Methodum generalem & Geometricam * ducendi Tangentes ad omnes Curvas sine calculo; & quæ complectitur non tantum *Barrovii* Methodos particulares, sed & ipsius generalem Methodum Analyticam, quam habes sub finem Lectionis decimæ. Methodus mea haud pluribus quam duodecim continetur Propositionibus.

Nº XVII. *Ex Epistola ejusdem ad eundem Anno* 1670, 23 Novemb. *data, cujus etiam conservatur Autographon.*

PLurimæ approximationes pro Circuli Segmentis ex his facile elici possunt; at vix operæ pretium erit, cum potestates alternas tollere nequeo, quod factum est a D. *Newtono* in sua Serie, modo Series sit: (nam ut dicam quod sentio, ad nullam mearum reducere possum) Autumo tamen meam pari facilitate & brevitate rem confecturam.

Nº XVIII. *Ex Autographo D.* Jacobi Gregorii *ad eundem D.* Collins, *de Fano Sti.* Andreæ, 19 Decembris *ejusdem Anni, misso.*

QUum postremas ad te dedi literas, nondum animadvertissem D. *Newtoni* Seriem de Circuli Zonis (quam jam dudum ad me misisti) una cum Infinito istiusmodi Serierum numero, Consectarium illius esse posse, quam misi de Logarithmis; nempe, Dato Logarithmo invenire ejus Numerum; vel radicem Potestatis cujuscunque puræ in infinitam seriem permutare. Me sane tam tardi fuisse ingenii miror, qui tanto temporis spatio hoc non animadverteram, quum tamen multum olei & operæ in ista Serie expiscanda impenderam. At ut ingenue fatear, semper in animum induxeram, si modo Series esset, me in eam incidere posse, op-

* Hinc innotuit Methodum Tangentium *Gregorii* & *Slusii* ex methodo *Barrovii* consequi.

aliqua

aliquarum e Seriebus meis pro Circulo inter ſe combinatis, quarum quidem plurimas ad manus habeo; neque ullam aliam deſideraram Methodum. Series tua paululum producta fit $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5R^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \frac{21B^{13}}{6656R^{11}} - \frac{11B^{15}}{5120R^{13}}$ — &c. Eiſdem etiam poſitis, erit Arcus (cujus Sinus B) $= B + \frac{B^3}{6R^2} + \frac{3B^5}{40R^4} + \frac{5B^7}{112R^6} + \frac{35B^9}{1152R^8} +$ &c. Plures hujuſcemodi Series proferre poſſem; ſed Tu fortaſſe plus meipſo de his rebus noſti.

N° XIX.

Ex Epiſtola D. Collins *ad dictum D.* Gregorium, 24 Decembris *Anno* 1670 *data: cujus habetur Exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

QUum D. *Dary* * Miſcellanea ſua in lucem edidit, exemplar libelli miſit ad D. *Newtonum*, qui dictum D. *Dary* Serie pro Area Zonæ Circuli, quam ad te miſi, remuneravit; quæ ſine omni dubio Series eſt legitima & eximia: Ope D. *Barrovii* nonnullas alias Series e Methodo *Newtoni* generali derivatas obtinui; eaſque conſerto colloquio deprehendi Analytice deduci poſſe e datis cujuſvis Figuræ proprietatibus; & multas Series ad ſingulas Figuras applicari poſſe. Univerſalem quoque eſſe, cujuſque ope omnes Quadraturas perficere poſſis, tam Curvarum quas ‖ *Carteſius* Geometricas eſſe admittit, quam earum quas cenſet Mechanicas.

Hac itaque methodo Curvæ omnium Figurarum communi proprietate definitarum rectificantur, earum Tangentes & Centra Gravitatis inveniuntur; item Rotunda earum Solida & Segmenta ſecunda cubantur; & in univerſis Curvis, Longitudine curvilinea data, ordinatim applicatæ inveniuntur, & vice verſa.

* *N.B.* Miſcellanea edidit D. *Michael Dary*, Anno 1669.

Exem-

Exempla quædam.

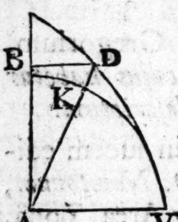
Arcu z dato, invenire Sinum x vel Co-ſinum y; poſita Unitate pro Radio.

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10} + \&c.$$

Et dato Sinu x, invenire z. $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \&c.$

Quadratricem Veterum quod attinet, nulla Methodus, nullus Geometra ejus Aream exhibere va-



luit. Sit igitur AV Radius circuli inſcripti Unitas, & VK Arcus x, erit Area BDVA $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{4}{13230}x^7 - \&c.$

Tractatum hac de re ſcripſit, i quo inventio longitudinis toti vel datæ partis Curvæ *Elliptica* & *Quadratricis* DV, nec non Are ſupradictæ, eſt inter exempla.

Nº XX. *Ex Epiſtola D.* Jacobi Gregorii *ad D.* Collins, 1 *Feb. Anno* 167$\frac{0}{1}$ *data, cujus habetur Autograph*

EX quo Epiſtolam ad te dedi, tres a te accep unam *Decemb.* 15, alteram *Dec.* 24, tertiam 2 *Januarii* nuper elapſi datam.

Quod attinet *Newtoni* Methodum univerſale aliqua ex parte, ut opinor, mihi innoteſcit, ta quoad Geometricas quam Mechanicas Curvas. N hilo tamen minus ob Series ad me miſſas grat habeo, quas ut remunerem mitto quæ ſequuntu

Sit Radius $= r$, Arcus $= a$, Tangens $= t$, Se cans $= s$,

$$\text{Et erit } a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8}, \&c.$$

$$\text{Eritque } t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \&c$$

E

Et $s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7}$ &c.

Sit nunc Tangens artificialis $= t$, & Secans artificialis $= s$, & integer quadrans $= q$,

Erit $s = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9}$ &c.

Sit $2a - q = e$, & erit $t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8}$ &c.

Sit nunc Secans artificialis 45 *gr.* $= s$, sitque $s + l$ Secans artificialis ad libitum, erit ejus Arcus $= \frac{1}{2}q + l - \frac{l^2}{r} + \frac{4l^3}{3r^2} - \frac{7l^4}{3r^3} + \frac{14l^5}{3r^4} - \frac{452l^6}{45r^5}$ &c. eritque $2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{72576r^8}$ &c.

Hic animadvertendum est Radium artificialem esse o; & ubi inveneris q majorem quam $2a$, sive artificialem Secantem 24 *gr.* majorem esse data Secante, mutanda esse Signa, & pergendum secundum vulgaris Algebræ præcepta.

Sit Ellipsis cujus alter Semiaxium $= r$, alter $= c$; ex quolibet Curvæ Ellipticæ puncto demittatur in Semiaxem r recta perpendicularis $= a$: erit Curva Elliptica perpendiculari a adjacens $= a + \frac{r^2a^3}{6c^4} + \frac{4r^2c^2a^5 - r^4a^5}{40c^8} + \frac{8c^4r^2a^7 + r^6a^7 - 4c^2r^4a^7}{112c^{12}} + \frac{64c^6r^2a^9 - 48c^4r^4a^9 + 24c^2r^6a^9 - 5r^8a^9}{1152c^{16}}$ &c.

Si determinetur Ellipseos species, Series hæc simplicior evadet. Ut si $c = 2r$, foret Curva prædicta $= a + \frac{a^3}{96r^2} + \frac{3a^5}{2048r^4} + \frac{113a^7}{458752r^6} + \frac{3419a^9}{75497472r^8}$ &c.

Reliquis vero manentibus, si Curva prædicta esset Hyperbola, prædicta quoque Series ei inserviret; si modo omnium terminorum partes affirmentur, & negentur totus terminus tertius, totus quintus, septimus &c. in locis imparibus.

Gratias ago maximas, tam ob benevolentiam qua mones de meditatis meis publicandis, quam ob perhumanas tuas pollicitationes. Nollem tantam molestiam tibi creare, neque mihi in animo est quicquam edere, præterquam Quadraturam meam Circuli recusam, additis quibusdam nugamentis. Quod attinet Methodum meam inveniendi Radices omnium Æquationum; una series unam tantum prodit Radicem, at pro qualibet radice infinitæ sunt series. Industria autem aliqua opus est ad seriem rite incipiendam, & ad quam pertineat radicem dignoscendam. Verum hac de re fusius forsan aliquando ad te scribam. Non est quod metuas cuiquam quicquid miserim communicare, parum enim solicitus sum, utrumne meo an alieno nomine in publicum prodeat.

N° XXI. *Ex Epistola D.* Collins *ad D.* Bertet Parisiis *tum agentem. Data autem est* 21 Februarii, *Anno* 170$\frac{0}{1}$; *ejusque exemplar manu ipsius D.* Collins *exaratum conservatur.*

SYstema Algebræ integrum componere opus est eximium, & dignum cui ab omnibus faveatur; præcipue vero quia quatuor circiter abhinc annis inventa fuit a D. *Isaaco Newtono* Methodus Analytica generalis, pro Quadratura omnium Spatiorum Curvilineorum, tam in Curvis Geometricis quam Mechanicis communi aliqua proprietate gaudentibus. Hujus ope quicquid a Quadraturis pendet peragitur, ut Rectificatio Curvarum, Inventio Tangentium & Centrorum Gravitatis; rotundorumque Solidorum & eorundem Segmentorum secundorum & curvarum Superficierum dimensuratio: (non autem Superficierum Solidorum quorum Axes inclinantur, uti Parabolicorum Conoidum, *&c.* hæc manet difficultas posteris superanda.) Hæc omnia peraguntur approximando verum in infinitum, absque Radicum extractione, ope infinitæ Seriei rationalium, cujusmodi multæ ad unam

nam eandemque Figuram diverſimode applicari poſſunt; *v. g.* ad Circulum, una ad inveniendam Aream totius vel partis cujuſvis; alia ad inſcriptas, alia ad adſcriptas *&c*: Ita ut dato Sinu, Tangente vel Secante, inveniri poteſt longitudo Arcus, & vice verſa, ope diverſarum Serierum ad eam rem appropriatarum. Unde fit ut jam calculo facilior inventu ſit Arcus e Sinu dato, & vice verſa, quam e Sinu dato Sinus dupli Arcus. Univerſim autem hoc nihil aliud eſt quam methodus a *Mercatore* uſurpata, in ejus Logarithmotechnia ad Hyperbolam quadrandam, generalis reddita —— D. *Jacobus Gregorius* apud *Scotos* nuperrime incidit in eandem methodum. N° XXII

Ex Epiſtola D. J. Collins *in Italiam ad D.* Alphonſum Borellum *miſſa*; *& menſe Decembri Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

K*Inckhuyſenii* Introductio ad Analyſim Specioſam, quam *Stel-konſt* vocat, a D. *Iſaaco Newtono* prælo parata eſt, qui jam Mathematices Profeſſor apud Cantabrigienſes factus eſt. Huic adjunget ipſius Methodum generalem Quadraturarum Analyticam, cujus ope calculo eruit omnium Curvilinearum Figurarum regularium, communi aliqua proprietate gaudentium, Aream; earundem Curvarum Rectificationem; inventionem Centrorum gravitatis earum; itemque rotunda Solida & Superficies eorum rotatione genitas; & Secunda iſtorum Solidorum Segmenta: imo dato quovis Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante in Canone, invenire poteſt Arcum ei competentem, abſque naturali Sinu, Tangente vel Secante prius invento, & vice verſa; idque generaliter, ſine ulla Radicum extractione.

Hujus Specimen pro Circulo appoſui.

N. B. *In hujus Epiſtolæ exemplari, locus vacuus Seriei interſerendæ relictus fuit.*

N° XXIII. *Ex Epistola ejusdem D.* Collins *ad D.* Franciscum Vernon *Anglum Parisiis tum agentem,* Londini 26 Decembris *Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

D. *Barrovius* certiorem me facit D. *Newtonum* pene adornasse *Kinckhuysenii* ad Algebram Introductionem (cujus hic brevi edendæ negotium mihi curæ erit) eamque de propria ipsius penu auctiorem reddidisse. Huic subjiciet generalem * suam infinitarum Serierum methodum Analyticam, cujus ope computantur omnium Spatiorum curvilineorum Areæ, tum Geometricorum tum eorum quæ ex mente *Cartesii* Mechanica sunt, (modo Figuræ una aliqua aut pluribus communibus proprietatibus definitæ sint) ipsarumque Curvarum longitudines, Centra Gravitatis, rotunda Solida & Superficies eorum rotatione genitæ. Hinc etiam eruuntur multæ pro Circulo Series; necnon quovis numero dato, tanquam Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante, calculo perfacili, sine ulla Radicum extractione, sine ullis Tabulis, inveniri potest Arcus ei respondens, & vice versa; idque vero quantum velis proxime, absque naturali Sinu, Tangente, aut Secante prius invento; tot tantisque commodis fœta est hæc Doctrina, de qua non nisi comperta loquor! Una cum his mittet viginti Lectiones ejus Opticas, quas D. *Barrovius* opus censet quo majus præsens ætas vix protulit. Admonui maturandam ideo esse impressionem, quoniam D. *Hugenius* tractatum de Dioptrica & de Curvarum evolutione jam molitur. Ille autem contra, se magis cupere, ut accepto harum rerum nun-

N. B. * *Hic Tractatus unus idemque est ac ille, cujus mentionem fecerat D.* Newtonus *in Epistola Octob.* 24. 1676. *data, per D.* Oldenburgum *D.* Leibnitio *communicata; & in quo methodi Serierum infinitarum & Fluxionum simul explicabantur, ut ibi loci memorat.*

cio-

cio, *Hugenius* potius excitaretur quam tardaretur; ratus, minime verisimile utriusque Hypotheses vel deductiones easdem esse posse.

Ex Epistola D. J. Collins *ad D.* Thomam Strode, *26 Julii Anno 1672 data: cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.* N°XXIV.

QUod Geometriam curvarum figurarum spectat; hanc tandem generaliter ad Calculum Analyticum reduci posse, omnino Orbi literato novum atque inauditum est. Hujus æquationes sunt Series terminis numero infinitis conflatæ (quorum tamen pauci sufficiunt communiter) ex notis Curvarum proprietatibus erutæ. Auctorem quod attinet, hujusque methodi præstantiam, hæc accipe.

Mense *Septembri* 1668, *Mercator* Logarithmotechniam edidit suam, quæ specimen hujus Methodi (*i. e.* Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe Quadraturam Hyperbolæ continet. Haud multo post quam in publicum prodierat liber, exemplar ejus Cl. *Wallisio Oxoniam* misi, qui suum de eo judicium in *Actis Philosophicis* statim fecit: aliumque *Barrovio Cantabrigiam*, qui quasdam *Newtoni* chartas (qui jam *Barrovium* in Mathematicis Prælectionibus publicis excipit) extemplo remisit; E quibus & ex aliis, quæ olim ab Auctore cum *Barrovio* communicata fuerant, patet illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot annis antea excogitatam & modo universali applicatam fuisse; ita ut ejus ope in quavis Figura Curvilinea proposita, quæ una vel pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ Figuræ, * accurata si possibile sit, sin minus infinite vero propinqua; Evolutio vel longitudo lineæ curvæ; Centrum gravitatis Figuræ, Solida ejus rotatione

* Testibus igitur *Barrovio* & *Collinio* methodus prædicta quadrandi figuras accurate si fieri potest, *Newtono* innotuit Anno 1666 aut antea.

 ge-

genita, & eorum Superficies; sine ulla Radicum Extractione obtineri queant.

Postquam intellexerat D. *Gregorius* hanc methodum, a D. *Mercatore* in *Logarithmotechnia* usurpatam, & *Hyperbolæ* quadrandæ adhibitam, quamque adauxerat ipse *Gregorius*, jam universalem redditam esse, omnibusque Figuris applicatam; acri studio eandem acquisivit, multumque in ea enodanda desudavit.

Uterque D. *Newtonus* & *Gregorius* in animo habet hanc methodum exornare: D. *Gregorius* autem D. *Newtonum* primum ejus Inventorem anticipare haud integrum ducit.

N° XXV. *Ex Epistola D.* Collins *ad D.* Newtonum 30 *Julii Anno* 1672 *data, cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

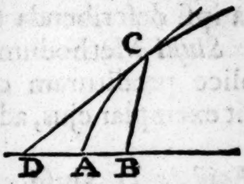
PArandis Seriebus pro extrahendis radicibus in Speciebus [Algebraicis] ad modum *Vietæ* [in Numericis] credo D. *Gregorium* haud modicam impendisse operam: nihil autem de ea re scribere suscipiet, antequam Tu, methodi hujus repertor, proprias de ea lucubrationes in lucem emiseris; sed aliis rebus per interim intentus est.

N° XXVI. *Ex Epistola D.* Newtoni *ad D.* Collins, *Anno* 1672, 10 *Decembris data. Repertum autem est ipsius* Newtoni *Autographum in scriniis D.* Collins, *una cum ejusdem exemplari manu D.* Collins *descripto.*

EX animo gaudeo D. *Barrovii* amici nostri reverendi lectiones Mathematicis exteris adeo placuisse, neque parum me juvat intelligere eos [*Slusium* & *Gregorium*] in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam esse conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone CB applicatam ad AB, in quovis angulo dato, termi-

nari

nari ad quamvis Curvam AC, & dicatur AB x & BC y, habitudoque inter x & y exprimatur qualibet æquatione, puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, qua ipsa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem hæc est; multiplica æquationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y, puta



$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -\,2xxy & +\,bxx & -\,bbx & +\,byy & -\,y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

; ut & juxta dimensiones x, puta

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -\,2xxy & +\,bxx & -\,bbx & +\,byy & -\,y^3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

. Prius productum erit Numerator, & posterius divisum per x Denominator Fractionis, quæ exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens CD: est ergo longitudo BD $= \frac{-2xxy+2byy-3y^3}{3xx-4xy+2bx-bb}$.

Hoc est unum particulare, vel corollarium potius Methodi generalis, quæ extendit se, citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes; verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, centris Gravitatis Curvarum, &c. Neque (quemadmodum *Huddenii* methodus de *Maximis* & *Minimis*) ad solas restringitur æquationes illas, quæ quantitatibus surdis sunt immunes.

Hanc methodum intertexui *alteri isti, qua Æquationum Exegesin instituo, reducendo eas ad

* Sc. in Tractatu quem *Newtonus* scripsit Anno 1671. Missum autem fuit Apographum hujus Epistolæ ad *Tschurnhausium* mense Maio 1675, & ad *Leibnitium* mense Junio 1676.

Series

Series infinitas. Memini me ex occasione aliquando narrasse D. *Barrovio*, edendis Lectionibus suis occupato, instructum me esse hujusmodi methodo Tangentes ducendi: Sed nescio quo diverticulo ab ea ipsi describenda fuerim avocatus.

Slusii Methodum Tangentes ducendi brevi publice prodituram confido: quamprimum advenerit exemplar ejus, ad me transmittere ne grave ducas.

Epistola D. Slusii *ad* Oldenburgh, *Anno* 167$\frac{2}{3}$, 17 *Januarii* Leodii *data, qua continetur methodus ejus ducendi Tangentes, inter Epistolas Regiæ Societatis asservatur Lib. N°* 6. *pag.* 11. *Legitur autem impressa in Transactionibus Philosophicis N°* 90.

N° XXVII. *Ex Epistola D.* Oldenburgh *ad D.* Slusium, *Anno* 167$\frac{2}{3}$, 29 *Januarii data, qua prædictis* Slusii *literis respondetur. Legitur autem exemplar ejus in libris Regiæ Societatis N°* 6. *pag* 27.

STatui, deo dante, prima occasione Methodum ipsam, prout Epistola tua continetur, Transactionibus Philosophicis inserere. Non ingratum interea fuerit accipere quæ Doctissimus noster *Newtonus*, in Academia *Cantabrigiensi* Mathematum Professor, de eodem argumento ad D. *Collinium* nostrum, qui te summopere & jugiter colit, nuper perscripsit in hæc verba.

" Non parum me juvat intelligere, Mathema-
" ticos exteros in eandem mecum incidisse ducen-
" di Tangentes methodum. Qualem eam esse
" conjiciam, ex hoc exemplo percipies. *Atque ita*
" *deinceps ut in præcedente ipsius* Newtoni *Epistola*
" *habetur.*

Hactenus *Newtonus*, quæ ideo nunc perscribo, ut cum novissimis tuis comparare possis.

Epi-

Epistola D. Slusii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1673, 3 *Maii* Leodii *data, qua continentur fundamenta Methodi Tangentium* Slusianæ, *cujusque asservatur exemplar in libris Epistolarum Reg. Societatis N°* 6. *pag.* 111. *impressa legitur in Phil. Transact. N°* 95. N° XXVIII.

Ex Epistola D. Oldenburgh *ad D.* Slusium, *Anno* 1673, 10 *Julii data. Legitur autem inter Epistolas Regiæ Societatis, Lib.* 6. *pag.* 196. N° XXIX.

EN tibi, Vir illustrissime, impressum modum tuum demonstrandi methodum tuam ducendi Tangentes ad quaslibet Curvas, quemadmodum postremis tuis literis eum mihi communicaveras: Subticui viri nomen offensionis evitandi causa. Scripsit mihi D. *Newtonus* in hanc sententiam.

" Ex priori tua Epistola subdubitabam, existi-
" maretne celeberrimus *Slusius* per ea, quæ ipsi
" de me scripseras, me mihi tribuere methodum
" ipsius ducendi Tangentes; donec intelligerem
" a D. *Collinio*, te ipsi significasse, eam, ex opi-
" nione tua, serius hic inventam fuisse. Tibi
" quippe videtur, eam D. *Slusio* perspectam fuisse
" aliquot annis priusquam ederet Mesolabum su-
" um, proindeque antequam ego eam intelligerem.
" At si res secus se haberet, cum tamen eam pri-
" mus communicaverit amicis suis & literato or-
" bi, jure merito ipsi debetur. Quoad methodos
" illas, eædem sunt, quanquam, crediderim, ex
" principiis diversis derivatæ. Nescio tamen num
" ipsius principia eam largiantur adeo generalem
" ac mea; quæ ad æquationes terminis surdis affe-
" ctas se extendunt, absque eorum ad aliam for-
" mam reductione.

Hæc ille, quæ in bonam partem a te acceptum iri confido.

Ex-

N° XXX. *Excerpta ex Epistola D.* Gothofredi Guilielmi Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Londini, Anno* $167\frac{2}{3}$, 3 *Feb. data. Hujus Autographon in scriniis Regiæ Societatis extat, & exemplar ejus in lib. Epist. dictæ Societatis N°* 6. *pag.* 35 *descriptum legitur.*

CUM heri apud illustrissimum *Boylium* incidissem in clarissimum *Pellium* Mathematicum insignem, ac de Numeris incidisset mentio, commemoravi ego, ductus occasione Sermonum, esse mihi methodum ex quodam differentiarum genere, quas voco generatrices, colligendi terminos Seriei cujuscunque continue crescentis vel decrescentis. Differentias autem generatrices voco, si datæ Seriei inveniantur differentiæ, & differentiæ differentiarum, & ipsarum ex differentiis differentiarum differentiæ *&c.* & series constituatur ex termino primo & prima differentia, & prima differentia differentiarum, & prima differentia ex differentiis differentiarum *&c.* ea Series erit differentiarum generatricium, ut si Series continue crescens vel decrescens fuerit *a, b, c, d.*

Posita $\backsim$ *differentiæ Nota,*] differentiæ generatrices erunt.

$$1\ a.\ 2\ \overline{a \backsim b}.\ 3\ \overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}.\ 4\ \overline{\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}} \backsim \overline{\overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}}.$$

$$\begin{array}{lccc}
4 & \overline{\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}} & \backsim & \overline{\overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}} \\
3 & \overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c} & & \overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}. \\
2 & a \backsim b \quad & b \backsim c & \quad c \backsim d \\
1 & a \quad b & & c \quad d
\end{array}$$

Aut in Numeris; si Series sit Numerorum cubicorum deinceps ab unitate crescentium, differentiæ generatrices erunt numeri 0, 1, 6, 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multipli-

catis

catis producuntur termini Seriei; cujus usus tum maxime apparet, cum differentiæ generatrices sunt finitæ; termini autem Seriei infiniti; ut in proposito exemplo Numerorum Cubicorum.

				0		0		0				
			6		6		6		6			
		6		12		18		24		30		
	1		7		19		37		61		91	
0		1		8		27		64		125		216

Hoc cum audisset clarissimus *Pellius* respondit, d jam fuisse in literas relatum a D. *Mouton* Canonico *Lugdunensi*, ex observatione nobilissimi viri *Francisci Regnaldis Lugdunensi*, dudum in literario Orbe celebris, in libro laudati D. *Mouton* de diametris apparentibus Solis & Lunæ. Ego qui ex Epistola quadam a *Regnaldo* ad *Monconisium* scripta, & Diario itinerum *Monconisiano* inserta, nomen D. *Moutoni* & designata ejus duo didiceram; Diametros Luminarium apparentes, & consilium de mensuris rerum ad posteros transmittendis; ignorabam tamen librum ipsum prodiisse: quare apud D. *Oldenburgium Societatis Regalis* Secretarium, sumtum mutuo tumultuarie percurri, & inveni verissime dixisse *Pellium*. Sed & mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur suspicio, quasi tacito inventoris nomine alienis meditationibus honorem mihi quærere voluissem; & spero appariturum esse, non adeo egenum me meditationum propriarum ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo. Primo si ipsas Schedas meas confusas, in quibus non tantum inventio mea sed & inveniendi modus occasioque apparet, monstrem: deinde si quædam momenti maximi *Regnaldo Moutonoque* indicta addam, quæ ab hesterno

vespere

vespere confixisse me non sit verisimile, quæque non possunt facile expectari a Transcriptore.

Ex Schedis meis occasio inventi hæc apparet: quærebam modum inveniendi differentias omnis generis potestatum, quemadmodum constat differentias Quadratorum esse numeros impares; inveneramque regulam generalem ejusmodi.

Data potentia gradus dati præcedente, invenire sequentem (vel contra) distantiæ datæ vel radicum datarum; seu invenire potentiarum gradus dati utcunque distantium differentias. Multiplicetur potentia gradus, proxime præcedentis radicis majoris per differentiam radicum; & differentia potentiarum gradus proxime præcedentis multiplicetur per radicem minorem: productorum summa erit quæsita differentia potentiarum, quarum radices sunt datæ. Eandem regulam ita inflexeram, ut sufficeret, præter radices, cujuslibet gradus, etiamsi non proxime præcedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuscunque licet altioris gradus inveniendas. Et ostendi quod in Quadratis observatur, numeros impares esse eorum differentias, id non nisi regulæ propositæ subsumptionem esse.

His meditationibus defixus, quemadmodum in Quadratis differentiæ sunt numeri impares, ita quoque quæsivi quales essent differentiæ Cuborum; quæ cum irregulares viderentur, quæsivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias esse numeros senarios. Hæc observatio mihi aliam peperit: videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos differentiasque sequentes, ac proinde, ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco o : 1 . 6 . 6, sequentes omnes. Hoc concluso restabat invenire, quo additionis, multiplicationisve, aut horum complicationis genere, termini sequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita resolvendo ex-

peri-

periundoque deprehendi primum Terminum o componi ex prima differentia generatrice o sumta semel seu vice una: Secundum 1 ex prima o semel & secunda 1 semel: Tertium 8 ex prima o semel, secunda 1 bis & tertia 6 semel: nam $o \times 1 + 1 \times 2 + 6 \times 1 = 8$. Quartum 27, ex prima o semel, secunda 1 ter, tertia 6 ter, quarta 6 semel: nam $o \times 1 + 1 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 1 = 27$, *&c.* idque Analysis mihi universale esse comprobavit. Hæc fuit occasio observationis meæ longe alia a *Moutoniana*, qui cum in Tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum *Regnaldo* incidit: nec vel illi vel *Regnaldo* adimenda laus; quod & *Briggius* in Logarithmicis suis jam olim talia quædam, observante *Pellio*, ex parte advertit. Mihi hoc superest ut addam nonnulla illis indicta, ad amoliendum Transcriptoris nomen; neque enim interest Reipublicæ quis observaverit, interest quid observetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud *Moutonium* non extat, & caput tamen rei est: quinam sint illi numeri, quorum Tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter se junctis, termini Serierum generentur. Vides enim ex ipso modo quo tabula ab eo *pag.* 385. exhibetur, non fuisse id ei satis exploratum; alioqui enim verisimile est ita Tabulam fuisse dispositurum, ut ea numerorum connexio atque harmonia appareret; nisi quis de industria texisse dicat: ita enim se habet pars Tabulæ.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus Tabulæ constructione solam haberi rationem corresponsus numerorum generantium cum numero Termini generati; ut cum terminus est quartus (4) producitur ex prima differentia semel, secunda ter 3, tertia ter 3, quarta semel 1; ideo in eadem (4) Linea transversa locantur 1. 3. 3. 1. Sed vel non observavit vel dissimulavit autor corresponsum numerorum, si a summo deorsum eundo per columnas disponantur hoc modo,

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim statim vera genuinaque eorum natura ac generatio apparet; esse scilicet eos numeros quos Combinatorios appellare soleo, de quibus multa dixi in dissertatiuncula de Arte Combinatoria; quosque alii appellant Ordines numericos; alii in

in ſpecie primam columnam Unitatum; ſecundam Numerorum naturalium, tertiam Triangularium, quartam Pyramidalium, quintam Triangulo Triangularium *&c.* de quibus integer extat Tractatus *Paſchalii* ſub titulo Trianguli Arithmetici; in quo tamen proprietatem numerorum ejuſmodi tam illuſtrem tamque naturalem * non obſervatam ſum miratus. Sed eſt profecto caſus quidam in inveniendo, qui non ſemper maximis ingeniis maxima, ſed ſæpe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum iſtorum natura, & Tabulæ conſtructio, ſive a *Regnaldo* ſive a *Moutonio* diſſimulata, intelligitur: ſemper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quam datæ: Atque illud quoque apparet, non opus eſſe moleſto calculo ad Tabulam a *Moutonio* propoſitam continuandam, ut ipſe poſtulat; cum hæ numerorum Series paſſim jam tradantur calculenturque.

Cæterum *Moutonius* obſervatione iſta ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego ad inveniendos ipſos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis, utendum cenſebam. Hinc ille, non niſi cum differentiæ ultimæ evaneſcunt (aut pene evaneſcunt) uſum regulæ invenit; ego detexi innumerabiles caſus, regula quadam

* *Imo obſervata fuit. Vide* Paſchalii *Triangulum Arithmeticum*, Pariſiis *Anno* 1665 *editum*, *pag.* 2. *ubi definitionum antepenultima hæc eſt.*

Le nombre de chaque cellule eſt egal a celuy de la cellue qui la precede dans ſon rang perpendiculaire, plus a celuy de la cellule qui la precede dans ſon rang parallele. Ainſi la cellule F, *c'eſt a dire le nombre de la cellule* F, *egale la cellule* C *plus la cellule* E; *& ainſi des autres.*

dam inobservata comprehendendos; ubi possum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum Seriērum in infinitum euntium, etsi differentiæ earum non evanescant.

Ex iisdem fundamentis possum efficere in progressionibus problemata plurima, aut in Numeris singularibus, aut in Rationibus vel Fractionibus: possum enim progressiones addere subtraheroque, imo multiplicare quoque & dividere, idque compendiose.

$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{126}$
&c.	*&c.*	*&c.*	*&c.*

Multa alia circa hos numeros observata sunt me, ex quibus illud eminet, quod modum habe summam inveniendi Seriei Fractionum in infini tum decrescentium; quarum numerator Unit nominatores vero numeri isti Triangulares aut Py ramidales, aut Triangulo Triangulares *&c.*

NºXXXI. *In scriniis etiam Reg. Societatis asservantur Au graphæ quinque Epistolarum, a D.* Leibnitio *D.* Oldenburgum *eodem Anno* 1673 *scriptaru prima autem* Londini *data est* Februarii 20, *liquæ vero* Parisiis Martii 30, Aprilis 26, M 24, *&* Junii 8. *Omniumque, si secundam ex pias, exemplaria leguntur in Libro Regiæ Societ tis Nº 6.* Pag. 34, 101, 115 *&* 137.

Nº XXXII. *Hactenus D.* Leibnitius *in Arithmetica versaba jam ad Geometriam se convertit, & Anno proxi ad* Oldenburgium *scribit Epistolas duas* Pari Jul. 15, & Oct. 36 *datas, quæ leguntur in Lib. pist. Regiæ Societatis Nº 7. pag.* 93 *&* 110, *eædem*

reperiuntur impressæ in Tomo tertio Operum Mathematicorum D. J. Wallis, *& in scriniis Reg. Societatis asservantur earum Autographa.*

Ex harum priore 15 Julii *data.*

DIU est quod nullas a me habuisti literas *&c.* —— Alia mihi Theoremata sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area Circuli, vel Sectoris ejus dati, exacte exprimi potest per Seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed & Methodos quasdam Analyticas habeo generales admodum & late fusas, quas majoris facio quam Theoremata particularia & exquisita.

Ex posteriore 26 Octob. *data.*

POrro, in ea Geometriæ parte rem memorabilem mihi evenisse nuncio. Scis D. Vicecomitem *Brounkerum*, & Cl. *Nic. Mercatorem* exhibuisse Infinitam Seriem numerorum rationalium, spatio Hyperbolæ æqualem. Sed hoc in Circulo efficere hactenus potuit * nemo. Etsi enim illi *Brounkerus* & *Wallisius* dederint numeros rationales magis magisque appropinquantes; nemo tamen dedit [*imo uterque dedit; sed forte non ejus sensu,*] Progressionem Numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit exacte æqualis Circulo. Sed vero mihi tandem feliciter successit. Inveni enim seriem Numerorum valde simplicem, cujus summa exacte æquatur Circumferentiæ Circuli; posito Diametrum esse Unitatem. Et habet

N° XXXIII.

* *Collinius* jam ante quadriennium Series *Newtonianas*, ante triennium *Gregorianas*, cum Amicis communicare cœpit. *Leibnitius* in *Anglia* diversabatur Anno superiore (1673) & hujusmodi Series nondum communicaverat, nec prius cum Amicis in *Anglia* communicare cœpit quam ab *Oldenburgo* acceperat, ut mox patebit; neque alias communicavit quam quas acceperat.

ea Series id quoque peculiare, quod miras quasdam Circuli & Hyperbolæ exhibet harmonias. Itaque Tetragonismi Circularis Problema, jam a Geometria traductum est ad Arithmeticam Infinitorum. Quod hactenus frustra quærebatur. Restat ergo tantum, ut Doctrina de Serierum seu Progressionum numericarum summis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam Circuli exactam quæsivere, ne viam quidem aperuere per quam eo pervenire posse spes sit. *Quod nunc primum a me factum dicere ausim.* Ratio Diametri ad Circumferentiam exacte a me exhiberi potest per Rationem, non quidem Numeri ad Numerum, (id enim foret absolute invenisse;) sed per rationem Numeri ad totam quandam Seriem numerorum rationalium valde simplicem & regularem. Eadem * Methodo etiam Arcus cujuslibet, cujus Sinus datur, Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest; nullo ad integræ Circumferentiæ dimensionem recursu. Ut adeo necesse non sit, Arcus rationem ad Circumferentiam nosse.

* Methodum exhibendi Arcum cujus Sinus datur, *Leibnitius* a *Oldenburgo* postea quæsivit, *Maii* 12, 1676.

N° XXXIV. *Excerpta ex Epistola D.* Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1674, 8 Decembris *data, cujus asservatur Autographum. Eadem autem legitur inter Epistolas Regiæ Societatis, Lib.* N° 7. *pag.* 119; *estque responsum ad literas D.* Leibnitii 26 Octobris *præcedentis datas.*

QUod de profectu in Curvilinearum dimensione memoras, bene se habet: sed ignorare te nolim Curvarum dimetiendarum rationem & Methodum a laudato *Gregorio*, nec non ab *Isaaco Newtono* ad Curvas quaslibet tum Mechanicas, tum Geometricas, quin & Circulum ipsum se extendere

dere, ita scilicet ut si in aliqua Curva Ordinatam dederis, istius Methodi beneficio possis Lineæ Curvæ longitudinem, Aream figuræ, ejusdem centrum Gravitatis, Solidum rotundum ejusque superficiem sive erectam sive inclinatam, solidique rotundi segmenta secunda; horumque omnium conversa invenire: quin & dato quolibet arcu in Quadrante, Logarithmicum Sinum, Tangentem vel Secantem, non cognito naturali, & conversum computare. Quod vero ais neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit æqualis circulo, id vero tibi tandem feliciter successisse, de eo quidem tibi gratulor, &c.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *Anno* 1675, 30 Martii *data. Extat Autographum scriptoris; & reperitur descripta inter Epistolas Reg. Soc.* N° 7. *pag.* 213. *Hac autem respondetur ad supradictas* Oldenburgi *literas* 8 *Decembris præcedentis datas.* N° XXXV.

Scribis clarissimum *Newtonum* vestrum habere methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniumque curvarum superficierum & solidorum ex revolutione genitorum dimensiones, & centrorum gravitatis inventiones, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quæ methodus si est universalis & commoda, meretur æstimari; nec dubito fore ingeniosissimo Authore dignam. Addis tale quid *Gregorio* innotuisse.

N° XXXVI.

Ex Epistolâ D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 15 Aprilis *data, cujus habetur exemplar inter Epistolas Reg. Societatis* N° 7. *pag.* 216. *Hac respondetur ad D.* Leibnitii *literas* 30 Martii *praecedentis datas: Anglice autem extat manu D.* Collins *designata ac* 10 Aprilis *data, eamque Latine transtulit D.* Oldenburg *& ad D.* Leibnitium *misit.*

D. *Collinius*, præmissa salute, quæ sequuntur remittit. Primo Cl. *Gregorium* in postremâ sua ad Illustrem *Hugenium* responsione Seriem suppeditasse ad semicircumferentiam circuli inveniendam, quæ talis.

Pone radium $= r$, dimidium latus quadrati inscripti circulo $= d$, & differentiam inter radium & latus quadrati $= e$: semicircumferentia æqualis est

$$\frac{4rr}{2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{2e^4}{113400d^3} - \frac{260e^5}{74844000d^4} -}$$

&c. in infinitum; quæ Series adeo produci potest, ut a semicircumferentia minus differat quam ulla quantitas assignabilis.

Editum hoc fuit a D. *Gregorio* postquam D. *Mercatoris* Logarithmotechnia jam extabat, quæ quam primum viderat lucem, ad D. *Barrovium* a me fuit transmissa; qui observato in ea infinitæ seriei usu ad Logarithmos construendos, rescribebat Methodum illam jam aliquandiu excogitatam fuisse a successore suo *Newtono*, omnibusque Curvis, earumque portionibus, Geometricis æque ac Mechanicis universim applicatam, cujus rei specimina quædam subjecit, viz.

Posita pro Radio Unitate, datoque x pro Sinu ad inveniendum z Arcum Series hæc est;

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \text{ \&c.}$$

infinitum. Et extracta radice hujus Æquationis methodo symbolica, si dederis z pro arcu, ad inveniendum x sinum series hæc est;

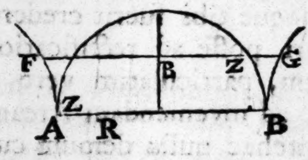
$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

Atque hæc Series facile continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex Sinu 30 grad. *Ceulenii* numeri facile struuntur.

Consimiliter si ponas radium R, & B Sinum arcus: Zona inter diametrum & Chordam illi parallelam est

$$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9}$$

$- \&c.$ Atque eadem series mutatis signis terminorum secundi, quarti & sexti, &c. inservit assignandæ Areæ Zonæ æquilateris Hyperbolæ, viz.



$$AFGB = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \&c.$$

Rursum, dato Radio R, & Sinu verso sive sagitta a, ad inveniendam Aream segmenti resecti a Chorda: pone b^2 pro $2Ra$,

& erit segmentum $= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \frac{7a^{11}}{832b^9} - \&c.$

Et Arcus integer $= 2b + \frac{a^2}{4b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{1408b^9} + \&c.$

Duæ hæ Series D. *Gregorio* debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo usus est hac Methodo; quod ab ipso aliquot post annis factum, postquam scilicet intellexerat D. *Newtonum* generatim eam ap-

applicasse. Exinde quoque ad nos misit Series similes ad Tangentes naturales ex earundem Arcubus, & conversim, obtinendum. Ex. gr. pone Radium $= r$, Arcum a, Tangentem t; erit $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} +$ &c.

Et conversim ex Tangente invenire Arcum ejus

$$*a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \text{\&c.}$$

Atque hoc factum cum vides, facile credideris, posse eadem Methodo æque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentem Logarithmicum absque inventione Naturalis, & conversim. Pronum quoque tibi fuerit credere Methodum hanc applicari posse ad rectificationem quarumlibet curvarum, particulatim vero ad lineam Quadratricem, & ad inveniendam Aream illius Figuræ: id quod antehac nulla demum cum Methodo fuit præstitum. Atque ulteriore calculationis labore extendi potest ad inveniendas Areas Superficierum in rotundis Solidis inclinantibus, nec non ad inveniendas Soliditates secundorum segmentorum in Solidis rotundis. *E. G.* Si Conoides aliqua secetur a plano transeunte per Basin ejus, poterit id vocari Segmentum primum; & si hæc portio iterum secetur a plano recto ad planum prius secans, portio eum in modum secta hoc ipso intenditur ut sit Segmentum [secundum.]

Porro Methodus eadem applicatur inveniendis radicibus purarum potestatum, valde affectarum æquationum; ita ut ex quolibet numero absque Logarithmorum ope, excitare possis quamlibet potestatem per saltum, & ex quavis potestate, utut affecta, invenire Radicem ejus, vel quodvis me-

* Hanc Seriem D. *Collins* initio anni 1671 a *Gregorio* acceperat ut supra; D. *Leibnitius* eandem cum amicis in *Gallia* hoc anno ut suam communicavit, celata hac Epistola.

di-

dium illud inter & Unitatem assignatum. D. *Gregorius* magno labore paravit Seriem infinitam, generatim respectivis potestatibus affectis cujuslibet æquationis propositæ adaptandam; ita ut quivis Algebræ cultor, penu ipsius instructus, mox aptare possit Seriem aliquam ad inveniendam quamlibet Radicem cujusvis æquationis propositæ, postquam innotuit ad quod latus noti limitis Radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos illum ad id faciendum solicitavimus, imprimis cum ipse lubens permittat *Newtono*, ut ille primus novæ hujus Methodi de infinita Serie inventionem orbi Mathematico patefaciat, &c.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1675, 20 Maii Parisiis *data. Extat Autographon ejus, eademque legitur in Lib. Epist. Regiæ Societatis N° 7. pag.* 235. *Responsum autem est ad prædictas D.* Oldenburgi *literas* 15 Aprilis *datas.* N° XXXVII.

Literas tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi & doctissimo *Collinio* gratias ago. Cum nunc præter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare Series quas misistis, ac cum * meis comparare. Ubi fecero, ‡ perscribam tibi Sententiam meam: nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari. *Collinium* ipsum

*His verbis patet Series, quas D. *Leibnitius* se ante annos aliquot invenisse professus est, à communicatis diversas fuisse. Subjungit etiam ipse verbis disertis *sua a Communicatis longe diversa esse circa hanc rem meditata.* Vid. Epist. *Maii* 12, 1676.

‡ *N. B.* Hoc nunquam fecit D. *Leibnitius*, sed ubi Series duas primas per *Mohrum* quendam denuo accepisset, postulavit Methodum D. *Newtoni* perveniendi ad istas duas Series ad se mitti, quasi nullas prius ab *Oldenburgo* accepisset. Et hoc pacto Epistolam *Olden-*

ſum magni facio, quoniam omnes puræ Matheſeos partes ab ipſo egregie cultas video. Multa habeo deſtinata a quibus me deterrent calculi tantum, qui nec ſuſcipi facile ab homine occupato, nec alteri niſi doctiſſimo ac ſinceriſſimo tuto credi poſſunt.

N° XXXVIII. *Ex Actis Eruditorum Anno* 1691 *Menſe* Aprili *pag.* 178. *habentur hæc D.* Leibnitii *verba.*

JAM Anno 1675 *compoſitum habebam * opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum, ſed quod, materia ſub manibus creſcente, limare ad editionem non vacavit, poſtquam aliæ occupationes ſupervenere; præſertim cum nunc prolixius exponere vulgari more, quæ Analyſis noſtra nova paucis exhibet, non ſatis operæ pretium videatur. Interim inſignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ noſtræ Propoſitionis dudum in Actis publicatæ innotuit, pro humanitate ſua noſtri qualiſcunque inventi candide meminere.*

denburgi oblivioni tradendo, licentiam obtinuit Serierum ab eo acceptarum ultimam ſibi vindicandi.

* Quadratura Arithmetica, de qua hic agitur, ea eſt quam *Gregorius* cum D. *Collinio* initio Anni 1671, *Oldenburgus* cum D. *Leibnitio* hoc Anno communicavit. De hac Quadratura D. *Leibnitius* opuſculum vulgari more compoſuit & cum amicis hoc anno communicare cœpit: Anno proximo ſcriptum polivit ut cum *Oldenburgo* communicaretur: Anno tertio in patriam redux Negotiis publicis intereſſe cœpit, & materia ſub manibus creſcente opus ad Editionem limare non amplius vacavit. Sed neque operæ pretium duxit ſubinde prolixius exponere vulgari more quæ Analyſis ſua nova paucis exhibet. Inventa eſt igitur hæc Analyſis poſtquam D. *Leibnitius* opuſculum vulgari more compoſitum polire & limare deſiit, & Negotiis publicis intereſſe cœpit.

Ex

Excerpta ex Schediasmatis manu D. Collins *exaratis & in scriniis ejus repertis, & nonnullis in locis* Oldenburgi *calamo castigatis; quæ quidem D.* Oldenburg *D.* Tschürnhausio *transmittenda acceperat & Latine verterat. Extant autem tum Autographa D.* Collins, *tum responsum ad eadem D.* Oldenburgo *redditum, cum Titulo manu ejus inscripto,* " Responsum ad Scriptum D. *Collinii* de *Cartesii* Inventis, Accep. d. 8 Junii 1675. N° XXXIX.

NOnnulli *Cartesium* arrogantiæ insimularunt, asserentem se ex omnibus modis Methodisve possibilibus, in optimam simplicissimamque incidisse: an ullibi hoc affirmaverit *Cartesius* plane nescio, certum tamen est Methodum ducendi Tangentes multum promotam fuisse a *Newtono* & *Gregorio*. Ita liquet ex *Newtoni* Epistola Anno 1672, 10 *Decemb.* data. *Vide pag.* 104.

N. B. *In hoc Schediasmate habetur Apographum Epistolæ hujus, ut & Apographum Epistolæ* Gregorii *ad* Collins 5 *Sept.* 1670. *supra impressæ.*

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 24 Junii *data, & in Lib. Epist. Regiæ Societatis N°* 7. *pag.* 243 *descripta. Responsum autem est ad præcedentes D.* Leibnitii *Literas* 20 Maii *datas.* N° XL.

DOminus *Newtonus*, beneficio Logarithmorum graduatorum in scalis παραλλήλως locandis ad distantias æquales, vel circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit radices Æquationum. Tres regulæ rem conficiunt pro Cubicis, quatuor pro Biquadraticis. In harum dispositione respectivæ Coefficientes omnes jacent in eadem Linea recta; a cujus puncto tam remoto a prima Regula ac scalæ graduatæ sunt ab

ab invicem, Linea recta iis superextenditur, una cum præscriptis conformibus genio æquationis, qua in regularum una datur potestas pura radicis quæsitæ.

N° XLI. *Ex Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *Anno* 1675, 12 Julii *data. Hujus extat Autographum; habeturque Exemplar ejus in Lib. Epist. Reg. Societatis N°* 7. *pag.* 149. *Responsum autem est ad Literas præcedentes D.* Oldenburgi, *& impressa legitur inter opera D.* Wallisii. *In hac perperam scribitur* Parius *pro* Darius.

Methodum Celeberrimi *Newtoni*, radices Æquationum inveniendi per Instrumentum, credo differre a mea. Neque enim video, in mea, quid aut Logarithmi aut Circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem Vobis non ingratam video, conabor absolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii sat erit.

Scripsisti aliquoties, Vestrates omnium Curvarum dimensiones per appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare Geometrice Dimensionem Curvæ Ellipseos vel Hyperbolæ ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura.

N° XLII. *Ex Epistola D.* Oldenburgi *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 30 Septemb. *data. Cujus extat Exemplar manu D.* Oldenburg *descriptum. Legitur etiam in Lib. Regiæ Societatis N°* 7. *pag.* 159. *& Responsum est ad præcedentem.*

Scriptum quoddam Belgicum Belga quidam *Georgius Mohr* vocatus, Algebræ & Mechanicæ probe peritus, apud *Collinium* nostrum reliquit, qui apographum ejus, quale hic insertum vides, impertire tibi voluit —— *Tschürnhausius* nuper

Parisios hinc profectus est, & te sine dubio jam salutavit. —— Scire cupis an dare nostrates Geometrice possint dimensionem Curvæ Ellipseos aut Hyperbolæ, ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura. Ait *Collinius* illos id præstare non posse Geometrica præcisione, sed dare eos posse ejusmodi approximationes quæ quacunque quantitate data minus a scopo aberrabunt. Et speciatim quod attinet alicujus arcus circuli rectificationem, impertiri tibi poterit laudatus *Tschürnhausius* Methodum a *Gregorio* nostro inventam, quam cum apud nos esset, *Collinius* ipsi communicavit.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 28 Decembris *Anno* 1675 *data. Extat Autographum ejus, describiturque in Lib. Reg. Societatis N°* 7. *pag.* 189. *& a D.* Wallisio *impressa est.* N° XLIII.

DUarum tibi literarum debitor, rogo ne sequius interpreteris silentium meum, soleo enim interrumpi nonnunquam, & hæc studia per intervalla tractare. Quod *Tschürnhausium* ad nos misisti, fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector, & ingenium agnosco in Juvene præclarum & magna promittens. Inventa mihi ostendit non pauca, Analytica & Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit.

Habebis & a me Instrumentum Æquationes omnes Geometricas construendi unicum: Et meam Quadraturam Circuli ejusque partium, per Seriem Numerorum Rationalium infinitam; de qua aliquoties scripsi, & quam jam plusquam Biennio abhinc Geometris hic communicavi.

Ex

N° XLIV. *Ex Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 12 Maii *Anno* 1676 *data, cujus Autographum in scriniis Regiæ Societatis asservatur, cum Notis manu* Oldenburgi *in tergo scriptis.*

CUM *Georgius Mohr* Danus [*superius Belga*] in Geometria & Analysi versatissimus, nobis attulerit communicatam sibi a Doctissimo *Collinio* vestro expressionem relationis inter Arcum & Sinum per infinitas Series sequentes: Posito Sinu x, Arcu z, Radio 1.

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \ \&c.$$

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \ \&c.$$

Hæc * INQUAM, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingeniosa videntur, & posterior imprimis Series elegantiam quandam singularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc Annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita, quam ‡ nunc polio. Oro ut Cl. *Collinio* multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.

N° XLV. *Ex Epistola D.* Collins *ad D.* Oldenburgum, D. Leibnitio *tum* Parisiis *agenti transmittenda. Hujus exemplar, Anno* 1676. 14 Junii, *manu ipsius D.* Collins *descriptum, ac in scriniis ejus repertum etiamnum conservatum est.*

RESpondeas, si placet, ad ea quæ quærit D. *Leibnitius* in Literis ejus 12 *Maii* datis, Sc-

* Quasi ante Annum easdem non accepisset ab *Oldenburgo*.

‡ Opusculum prædictum de Quadratura Arithmetica D. *Leibnitius* polire perrexit.

riei primæ numeros Coefficientes, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{112}$, $\frac{35}{1152}$, hoc modo compositos esse, $\frac{1\times1}{2\times3}=\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}\times\frac{3\times3}{4\times5}=\frac{3}{40}$, & $\frac{3}{40}\times\frac{5\times5}{6\times7}=\frac{5}{112}$, & $\frac{5}{112}\times\frac{7\times7}{8\times9}=\frac{35}{1152}$, & $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times9}{10\times11}=\frac{63}{2816}$, atque ita deinceps in infinitum: unde intelligi possit hanc Seriem elegantia minime cedere conversæ ejusdem, quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem Argumento, cum fundamentis plane diversis innitantur, non possunt nobis non esse acceptissima; atque exoptamus ea fidem nostram exuperare posse. Hujus autem Methodi ea est præstantia, ut cum tam late pateat, ad nullam hæreat difficultatem. *Gregorium* autem aliosque in ea fuisse opinione arbitror, ut quicquid uspiam antea de hac re innotuit, quasi dubia diluculi lux fuit, si cum meridiana claritate conferatur.

HOC *Anno, cum* D. Gregorius *anno superiore ad finem vergente emortuus esset, quæ cum Amicis communicaverat in unum corpus solicitante* D. Leibnitio *collecta sunt. Et extat collectio manu* D. J. Collins *exarata, cum hoc Titulo*; N° XLVI.

Excerpta ex D. Gregorii *Epistolis cum* D. Leibnitio *communicanda, tibique postquam perlegerit ille reddenda. Et sic orditur.*

D .H. Oldenburg *Armigero.*

QUandoquidem impense rogasti me, permotus solicitationibus D. *Leibnitii* & aliorum ex *Academia .Regia Parisina*, ut Historiolam aliquam concinnarem, Studia & Inventa doctissimi D. *Jacobi*

cobi Gregorii nuper defuncti exhibentem; quoniamque arcta inter nos amicitia, crebraque dum viveret literarum reciprocatio fuit: In honorem Nominis ejus, quæcunque majoris momenti in literis ejus occurrunt, summa fide in unum colligere statuo, &c.

* *Extracts from Mr.* Gregory's *Letters, to be lent Monsieur* Leibnitz *to peruse; who is desir'd to return the same to you.*

‡ *To* H. Oldenburg, *Esq;*

SIR,

FOrasmuch as you have much pressed me your self, being incited thereto by the earnest Desires of Mr. *Leibnitz* and others of the Royal Academy at *Paris*, to give an Account of the great Pains and Attainments of the late learned Mr. *James Gregory*, deceas'd; there being a great Friendship, and frequent Correspondence between us in his Life time; I shall for the Honour I bear to his Memory, impartially give you an Account of the most material Passages in his Letters.

In hac Collectione habetur Epistola superius impressa Gregorii *ad* Collins 5 Sept. 1670. *Habetur & Epistola superius impressa, quo* Gregorius *Quadraturam prædictam Arithmeticam initio Anni* 1671 *cum D.* Collins *communicavit: Habetur & Epistola D.* Newtoni *ad D.* Collins, 10 Decemb. 1672 *data, & superius impressa, in qua* Newtonus *se Methodum generalem habere dicit ducendi Tangentes, quadrandi Curvilineas, & similia peragendi; & Methodum Exemplo ducendi Tangentes exponit: quam Methodum D.* Leibnitius differentialem *postea vocavit. Hæc Collectio ad D.* Leibnitium *missa fuit* 26 Junii 1676.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Davidem Gregorium *prædicti* Jacobi Gregorii *nuper defuncti fratrem. Data autem est Anno* 1676, 11 Augusti, *ejusque habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.* Nº XLVII.

HIstoriolam composui, qua in unum congessi quæcunque unquam a Fratre tuo de rebus Mathematicis, vel literis aliasve scripto, vel colloquio acceperim: eo fine ut eandem scrinii Regiæ Societatis (cujus erat sodalis) commissam & asservatam, Amici ejus inspicere possint, vel si libuerit soluto pretio transcriptam habere. Constat autem duodecim circiter schedis. Me vero nihil omisisse quod alicujus momenti esse poterit, si nonnulla cum *Hugenio* aliisve controversa excipias, aris sacras juraturus contingere ausim. Mathematicis *Gallis* quousque profecerat, quæque reliquerat Frater tuus, scire aventibus, me operam dedisse ut satisfacerem, ex sequentibus comperies. *Sub finem autem exemplaris hujus Epistolæ hæc subjunxerat* D. Collins.

Eruditi ex Academia Regia *Parisiensi*, audita D. *Gregorii* morte, cupide sciscitabantur ea quæ moriens reliquerat; simulque narrationem eorum quæ attinent doctrinam Serierum infinitarum apud nos repertam petebant: Sequentem ideo ad eos transmittendam curavi, ac deinde ad *Davidem Gregorium* Fratrem *Jacobi* superstitem.

Quod attinet Doctrinam Serierum infinitarum; *Mercator* in Logarithmotechnia sua primum Specimen ejus orbi exhibuit, applicando eam ad Hyperbolæ Quadraturam tantum, & ad Logarithmorum Constructionem, absque radicum extractione. Hanc ipsam ejus doctrinam a D. *Wallisio* in Transact. Philosoph. illustratam habemus; eamque postea adauxit & promovit D. *Gregorius* in Exercitationibus ejus Geometricis eodem anno editis.

K Paucos

Paucos post menses quam editi sunt hi Libri, missi sunt ad D. *Barrovium Cantabrigiæ*; ille autem responsum dedit, hanc infinitarum Serierum doctrinam jam ante biennium a D. *Isaaco Newtono* inventam fuisse, & quibusvis Figuris generaliter applicatam; simulque transmisit D. *Newtoni* opus manuscriptum, a D. *Collins* deinde cum D. Vicecomite *Brounker* Regiæ Societatis tum Præside communicatum. *Barrovio* autem cathedram Mathematicam abdicante, *Newtonus* ab eodem commendatus in successorem ejus electus est, & de hac Doctrina publice prælegit; Lectionesque ejus in Bibliotheca publica *Cantabrigiensi* asservantur.

Collins deinde, mediante D. *Barrovio*, D. *Newtono* familiaris factus literarum commercium cum eo habuit; & ab eo Epistolam obtinuit 10 *Decembris* Anno 1672 datam, qua docet modum ducendi Tangentes ad Curvas Geometricas, ope Æquationis qua relatio inter Ordinatim applicatas & Abscissas exprimitur. *Vide Epistolam hanc pag.* 104, 105.

Collins etiam in diversis literis Anno 1669 ad D. *Gregorium* datis, eidem significavit *Newtoni* in hac materia successus. *Gregorius* autem contra, se quoque plures habere pro circulo Series; simulque petiit nonnullas e *Newtonianis*, quas cum propriis conferre voluit, ad se mitti. Misit igitur aliquas D. *Collins*, quas *Gregorius* a suis prorsus diversas, & faciliores calculoque aptiores inveniens, haud levi studio in eandem ipsam *Newtoni* Methodum incidit, circa Annum exeuntem 1670: sicut ipse aperte in Epistola 19 *Decemb.* testatur. *Pag.* 96.

Cum D. Leibnitius *Methodum perveniendi ad Series Anno superiori sibi missas desideraret, & ut* Gregoriana *omnia* Lutetiam Parisiorum *mitterentur,* Oldenburgus *&* Collins Newtonum *enixe rogarunt ut ipse Methodum suam describeret cum D.* Leibnitio *communicandam.*

Epistola prior D. Isaaci Newton, *Matheseos Professoris in Celeberrima Academia* Cantabrigiensi; *ad D.* Henricum Oldenburg, *Regalis Societatis* Londini *Secretarium*; 13 Junii 1676, *cum Illustrissimo Viro D.* Godfredo Guilielmo Leibnitio (*eo mediante*) *communicanda. Literis* Oldenburgi, (26 Junii) *ad* Leibnitium *missa.* N° XLVIII.

QUanquam D. *Leibnitii* modestia, in Excerptis quæ ex Epistola ejus ad me nuper misisti, Nostratibus multum tribuat circa Speculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de qua jam cœpit esse rumor: Nullus dubito tamen quin ille, non tantum, *quod asserit*, Methodum reducendi Quantitates quascunque in ejusmodi Series, sed & varia Compendia, forte nostris similia si non & meliora, adinvenerit.

Quoniam tamen ea scire pervelit quæ ab Anglis hac in re inventa sunt; & ipse ante annos aliquot in hanc Speculationem inciderim: Ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum quæ mihi occurrerunt ad te transmisi.

Fractiones in Infinitas Series reducuntur per Divisionem; & Quantitates Radicales per Extractionem Radicum; perinde instituendo Operationes istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Hæc sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc * *Theorema*.

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{4n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

* Resolutionem Binomii in hujusmodi Seriem Anno 1669 *Newtono* notuisse patet, ex Analysi supra impressa, pag. 91, lin. 18, 19.

Ubi P + PQ significat Quantitatem cujus Ra dix, vel etiam Dimensio quævis, vel Radix Di mensionis, investiganda est. P, Primum Termi num quantitatis ejus; Q, reliquos terminos divi sos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem Indicem di mensionis ipsius P + PQ: sive dimensio illa Inte gra sit, sive (ut ita loquar) Fracta; sive Affirma tiva, sive Negativa. Nam, sicut Analystæ, pr aa, aaa, &c. scribere solent a^2, a^3, &c. sic ego pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.\,a^5}$, &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et sic pr $\frac{aa}{\sqrt{c.\,\overline{a^3+bbx}}}$ scribo $aa \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$; & p $\frac{aab}{\sqrt{c:\,\overline{a^3+bbx} \times \overline{a^3+bbx}:}}$ scribo $aab \times \overline{a^3+bbx}|^{-}$

In quo ultimo casu, si $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur e $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula: erit $P = a^3$, $Q = \frac{bbx}{a^3}$, m -2, $n = 3$. Denique, pro terminis inter op randum inventis in Quoto, usurpo A, B, C, &c. Nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro cundo $\frac{m}{n}AQ$; & sic deinceps. Cæterum usus R gulæ patebit Exemplis.

Exemplum 1. Est $\sqrt{cc+xx}$ (seu $\overline{cc+x}$ $= c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{19}}{256c^9} -$

Nam, in hoc casu, est $P = cc$, $Q = \frac{xx}{cc}$, $m =$ $x = 2$, $A \left(= P^{\frac{m}{n}} = cc^{\frac{1}{2}}\right) = c$. $B \left(= \frac{m}{n}AQ\right) =$ $C \left(= \frac{m-n}{2n}BQ\right) = -\frac{x^4}{8c^3}$. Et sic deinceps.

Exemplum 2. Est $\sqrt{5:\overline{c^5+c^4x-x^5}}$: (id est, $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8xx + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9}$ + &c. Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x - x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q. Et tunc evadet $\sqrt{5:\overline{c^5+c^4x-x^5}}: = -x + \frac{c^4x+c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx+4c^9x+2c^{10}}{25x^9}$ + &c. Prior modus eligendus est si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt{c:\overline{y^3-a^2y}}}$ (hoc est, $N \times \overline{y^3-a^2y}|^{-\frac{1}{2}}$) æqualis $N \times \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7}$ &c. Nam P $= y^3$. Q $= -\frac{aa}{yy}$. $m = -1$, $n = 3$. A ($P^{\frac{m}{n}} = y^{3 \times -\frac{1}{3}}$) $= y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. B ($= \frac{m}{n}$AQ $= -\frac{1}{3} \times -\frac{aa}{yy}$) $= \frac{aa}{3y^3}$ &c.

Exemplum 4. Radix Cubica ex Quadrato-quadrato ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}$ + &c. Nam P $= d$. Q $= \frac{e}{d}$. $m = 4$. $n = 3$. A ($= P^{\frac{m}{n}}$) $= d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exempl. 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut, si quadrato-cubus ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^5$ seu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) desideretur: Erit juxta Regulam, P $= d$. Q $= \frac{e}{d}$. $m = 5$. & $n = 1$. Adeoque A ($= P^{\frac{m}{n}}$) $= d^5$. B ($= \frac{m}{n}$ AQ) $= 5d^4e$. & sic C $= 10d^3ee$. D $= 10dde^3$. E $= 5de^4$. F $= e^5$. & G =)

$(= \frac{m-5n}{6n}FQ) = 0$. Hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5} = d^{5} + 5d^{4}e + 10d^{3}ee + 10dde^{3} + 5de^{4} + e^{5}$.

Exempl. 6. Quinetiam Diviſio, ſive ſimplex ſit, ſive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut ſi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$ ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in ſeriem ſimplicium terminorum reſolvendum ſit: Erit, juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$. & A $(= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}) = d^{-1}$ ſeu $\frac{1}{d}$. B $(= \frac{m}{n}AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}) = -\frac{e}{dd}$. Et ſic $C = \frac{ee}{d^{3}}$. $D = -\frac{e^{3}}{d^{4}}$ &c. Hoc eſt, $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^{3}} - \frac{e^{3}}{d^{4}}$ &c.

Exem. 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt Unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^{3}} - \frac{3e}{d^{4}} + \frac{6ee}{d^{5}} - \frac{10e^{3}}{d^{6}} +$ &c.

Exemplum. 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit

$$N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^{3}}{81d^{\frac{10}{3}}} + \&c.$$

Exempl. 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eſt, N diviſum per radicem quadrato-cubicam ex Cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt{5:\, d^{3} + 3dde + 3dee + e^{3}}}$) evadit

$$N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^{3}}{125d^{\frac{18}{5}}} + \&c.$$

Per eandem Regulam, Geneſes Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates aut per Quantitates Radicales, & Extractiones Radicum altiorum in Numeris, etiam commode inſtituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum Affectarum in Speciebus imitantur earum Extractionem in

Nu-

Numeris. Sed Methodus *Vietæ* & *Oughtredi* nostri huic negotio minus idonea est. Quapropter aliam excogitare adactus sum, *cujus ſpecimina, ne repetantur, vide in Tractatu de Analyſi, &c. pag.* 9, 10, *&c.*

Dicam tantum in genere, Quod radix cujuſvis Æquationis ſemel extracta, pro Regula reſolvendi conſimiles æquationes aſſervari poſſit; quodque ex pluribus ejuſmodi Regulis, Regulam Generaliorem plerumque efformare liceat; & quod Radices omnes, ſive ſimplices ſint ſive affectæ, modis infinitis extrahi poſſint; de quorum ſimplicioribus itaque ſemper conſulendum eſt.

Quomodo ex Æquationibus ſic ad Infinitas Series reductis, Areæ & Longitudines Curvarum, contenta & Superficies ſolidorum, vel quorumque Segmentorum figurarum quarumvis, eorumlibet Centra Gravitatis determinentur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejuſmodi Æquationes Infinitarum Serierum reduci poſſint, indeque Problemata circa illas reſolvi perinde ac ſi Geometricæ eſſent; nimis longum foret deſcribere. Sufficiat Specimina quædam talium Problematum recenſuiſſe: Inque iis, brevitatis gratia, literas A, B, C, D, &c. pro terminis Seriei, ſicut ſub initio, nonnunquam uſurpabo. Nº XLIX.

1. Si ex dato Sinu Recto, vel Sinu Verſo, Arcus deſideretur: Sit radius r, & ſinus rectus x: Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$ &c. Hoc eſt, $= x + \frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr} A + \frac{3\times3\,xx}{4\times5\,rr} B + \frac{5\times5\,xx}{6\times7\,rr} C + \frac{7\times7\,xx}{8\times9\,rr} D +$ &c. Vel ſit d diameter, ac x ſinus verſus; & erit Arcus $= d^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} +$

 $5x^{\frac{7}{2}}$

$\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112 d^{\frac{5}{2}}}$ &c. Hoc eſt, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd}$ $+ \frac{5x^3}{112d^3}$ + &c.

2. Si viciſſim ex dato Arcu deſideretur Sinus: Sit radius r, & arcus z: Eritque ſinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8}$ — &c. Hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2 \times 3rr}A - \frac{zz}{4 \times 5rr}B - \frac{zz}{6 \times 7rr}C$ — &c. Et ſinus verſus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7}$ +&c. Hoc eſt, $\frac{zz}{1 \times 2r} - \frac{zz}{3 \times 4rr}A - \frac{zz}{5 \times 6rr}B - \frac{zz}{7 \times 8rr}C$ — &c.

3. Si Arcus capiendus ſit in ratione data ad a-lium Arcum: Eſto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæſitus ad arcum illum da-tum ut n ad 1: Eritque arcus quæſiti Chord $= nx + \frac{1-nn}{2 \times 3dd}xxA + \frac{9-nn}{4 \times 5dd}xxB + \frac{25-nn}{6 \times 7dd}xxC$ $+ \frac{49-nn}{8 \times 9dd}xxD + \frac{81-nn}{10 \times 11dd}xxE$ + &c. Ubi nota, quod cum n eſt numerus impar, Serie deſinet eſſe infinita, & evadet eadem quæ prodi per vulgarem Algebram, ad multiplicandum da-tum angulum per iſtum numerum n.

4. Si in Axe alteru tro AB Ellipſeos AD (cujus centrum C, & axis alter DH) detu punctum aliquod E circa quod recta EG occurrens Ellipſi i G, motu angulari f ratur; & ex data Area ſectoris Elliptici BEG quæratur recta GF, quæ a puncto G ad axem nor maliter demittitur: Eſto $BC = q$, $DC = r$ $EB = t$, ac duplum areæ $BEG = z$;

E

Et erit GF $= \frac{z}{t} - \frac{q}{6rrt^4}z^3 + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7}z^5$ $- \frac{280q^3 + 504qq - 225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7 +$ &c. Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt.

5. In eadem Ellipſi, ſi ſtatuatur CD $= r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$ & CF $= x$: Erit Ellipticus DG $= x + \frac{1}{6cc}x^3$

$$\begin{array}{llll}
+\frac{1}{10rc^3}x^5 & +\frac{1}{14rrc^4}x^7 & +\frac{1}{18r^3c^5}x^9 & +\frac{1}{22r^4c^6}x^{11} + \&c. \\
-\frac{1}{40c^4} & -\frac{1}{28rc^5} & -\frac{1}{24rrc^6} & -\frac{1}{22r^3c^7} \\
 & +\frac{1}{112c^6} & +\frac{1}{48rc^7} & +\frac{3}{88rrc^8} \\
 & & -\frac{5}{1152c^8} & -\frac{5}{352rc^9} \\
 & & & +\frac{7}{2816c^{10}}
\end{array}$$

Hic numerales Coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in Muſica progreſſione: Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$, $\frac{\frac{3}{3}n - 3}{4}$, $\frac{\frac{5}{4}n - 5}{6}$, $\frac{\frac{7}{5}n - 7}{8}$, $\frac{\frac{9}{6}n - 9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. *E. g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$, hoc eſt in 1; & prodit $\frac{1}{22}$ numeralis coefficiens termini proxime inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{3}n - 3}{4}$, ſive in $\frac{n - 3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{3}{4}$: & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in

in ista columna. Atque ista $\frac{1}{12} \times \frac{\frac{3n}{4}-5}{6}$ facit numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{378} \times \frac{\frac{7n}{5}-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum usque columnis præstari potest: Adeoque valor ipsius DG per hanc Regulam pro libitu produci.

Adhæc, si BF dicatur x, sitque r latus rectum Ellipseos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus BG =

$$\sqrt{rx} \text{ in } 1 + \frac{2 - \frac{3}{2}e}{3r}x + \frac{-2 + 3e - \frac{5}{8}ee}{5rr}x^2 + \frac{+4 - 9e + \frac{43}{4}e^2 - \frac{7}{16}e^3}{7r^3}x^3 + \frac{-10 + 30e - \frac{123}{4}e^2 + \frac{91}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^4}{9r^4}x^4 + \&c.$$

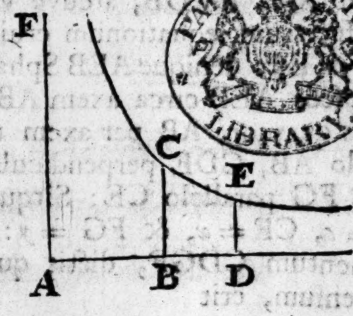
Quare, si ambitus totius Ellipseos desideretur: Biseca CB in F, & quære Arcum DG per prius Theorema, & Arcum BG per posterius.

6. Si vice versa, ex dato Arcu Elliptico DG quæratur Sinus ejus CF; tum dicto CD $= r$, $\frac{CB^2}{CD}$ = & Arcu illo DG $= z$; erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14rrc}z^7 + \&c.$$
$$+ \frac{13}{120c^4} + \frac{71}{420rc^5}$$
$$- \frac{493}{90720c^6}$$

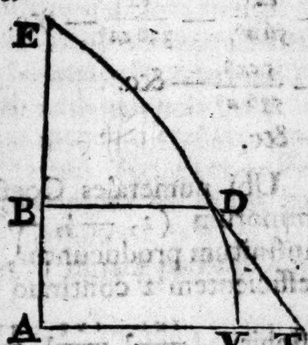
Quæ autem de Ellipsi dicta sunt omnia, facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum signis ipsorum c & e, ubi sunt imparium dimensionum.

7. Præterea, si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF rectum angulum FAD constituant; & ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur , BC b, & Area BCED



; Erit BD $= \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ + &c. Ubi Coefficientium Denominatores prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ Progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in se continuo. Et hinc ex Logarithmo dato potest Numerus ei competens inveniri.

8. Esto VDE Quadratrix, cujus vertex est V; existente A centro, & AE semidiametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demissoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T: Dic AV $= a$, &

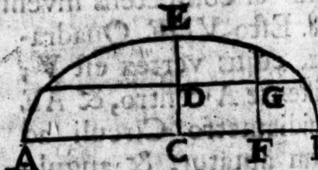


AB $= x$; Eritque DB $= a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$ — &c. Et VT $= \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5}$ + &c. Et Area AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5}$ —&c. Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6}$ + &c. Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut

aut Area AVDB, arcuve VD, per Refolutionem affectarum æquationum erui poteft x feu AB.

9. Efto denique AEB Sphæroides revolutione Ellipfeos AEB circa axem AB genita, & fecta Planis quatuor, AB per axem tranfeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bifecante axem, & FG parallelo CE: Sitque recta CB $= a$, CE $= c$, CF $= x$, & FG $= y$: Et Sphæroideos fegmentum CDGF, dictis quatuor Planis comprehenfum, erit

$$+\,2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - \&c.$$
$$- \frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^5aa} - \&c.$$
$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \&c.$$
$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \&c.$$
$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \&c.$$
$$- \&c.$$



Ubi numerales Coefficientes fupremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur, multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progreffionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna defcendentium in infinitum, producuntur multiplicando continuo coefficientem fupremi termini, in prima columna, per eandem progreffionem; in fecunda autem, per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c. in tertia, per terminos hujus

$\frac{3\times1}{2\times3}$, $\frac{5\times3}{4\times5}$, $\frac{7\times5}{6\times7}$, $\frac{9\times7}{8\times9}$, &c. in quarta, per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}$, $\frac{7\times3}{4\times5}$, $\frac{9\times5}{6\times7}$, & in quinta, per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}$, $\frac{9\times3}{4\times5}$, $\frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et sic in infinitum.

Et eodem modo segmenta aliorum Solidorum designari, & valores eorum aliquando commode per Series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas æquationes amplientur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pene dixerim problemata (si numeralia *Diophanti* & similia excipias) sese extendit. N° L.

Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi Series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad Series Infinitas per Divisionem vel Extractionem Radicum simplicium affectarumve pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem Infinitarum Serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hæ speculationes diu mihi fastidio esse cœperunt, adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim.

Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad Infinitam Æquationem deducitur, possint inde variæ Approximationes, in usum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæsitæ, multo labore temporisque dispendio constare solent.

Cujus rei exemplo esse possunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura Circuli. Nam, ut ex data Arcus Chorda A, & dimidii Arcus Chorda B, Arcum illum proxime assequaris; Finge arcum illum esse z, & circuli radium r; juxtaque su-

ſuperiora erit A (nempe duplum Sinus dimidii z)

$= z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ &c. Et B $= \frac{1}{2}z -$

$\frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ &c. Duc jam B in

numerum fictitium n, & a producto auſer A, &

reſidui ſecundum terminum, (nempe $- \frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6}$

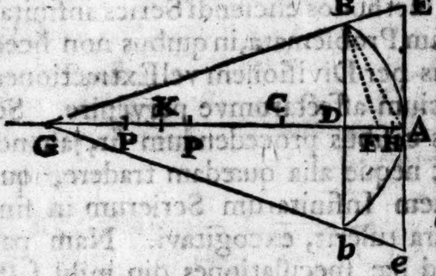
$+ \frac{z^3}{4 \times 6rr}$) eo ut evaneſcat, pone $= 0$; indeque

emerget $n = 8$; & erit $8B - A = 3z * -$

$\frac{3z^5}{64 \times 120r^4} +$ &c. hoc eſt, $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tan-

tum exiſtente $- \frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in exceſſu. Quod eſt

Theorema *Hugenianum*.



Inſuper, ſi in Arcus Bb ſagit- ta AD indefinite producta quæra- tur punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb abſcin- dant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui

ſti: Eſto Circuli centrum C, Diameter AK$=d$,

& ſagitta AD $= x$: Et erit DB

$(= \sqrt{dx - xx}) = d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16 d^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Et AE $=$ AB $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40 d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112 d^{\frac{5}{2}}}$

&c. Et AE$-$DB : AD : : AE : AG. Quare

AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d} -$ vel $+$ &c. Finge ergo

AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$: & viciſſim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x)$

AG

: DB :: DA : AE — DB. Quare AE — DB = $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Adde DB; & prodit

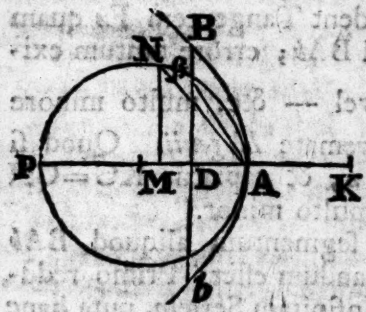
$$AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} - \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito; & restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel — &c. Quare in AG cape AH quintam partem DA, & KG = HC, & actæ GBE, *Gbe* abscindent Tangentem E*e* quam proxime æqualem Arcui BA*b*; errore tantum existente $\frac{2 \times 6x^3}{525d}\sqrt{dx}$ + vel — &c. multo minore scilicet quam in Theoremate *Hugenii*. Quod si fiat 7AK : 3AH :: DH : *n*; & capiatur KG = CH — *n*, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, si Circuli segmentum aliquod BA*b* per Mechanicam designandum esset: Primo reducerem Aream istam in Infinitam Seriem, puta hanc B*b*A $= \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ — &c. Dein quærerem constructiones Mechanicas quibus hanc Seriem proxime assequerer; cujusmodi sunt hæ: Age rectam AB, & erit segmentum B*b*A = $\overline{AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime: existente scilicet errore tantum $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}$ + &c. in defectu: Vel proximius, erit segmentum illud (bisecto AD in F, & acta recta BF) = $\frac{4BF + AB}{15} \times 4AD$; existente errore solummodo $\frac{x^3}{560d^2}\sqrt{dx}$ + &c; qui semper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi seg-

segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

Sic & in Ellipsi ABb [*Vid. Fig. praecedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19\,AK+21\,AP}{10AK} \times AD$. In Hyperbola vero, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK+21P}{10\,AK} \times AD$. Et acta recta GBE abscindet tangentem AE quam proxime aequalem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo Arcus ille non sit nimis magnus.



Et pro Area Segmenti Hyperbolici BbA, in DP cape $MD = \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia semicirculo super Diametro AP descripto; Eritque $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD = BbA$ proxime: Vel proximius, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = BbA$; si modo capiatur $DM = \frac{5AD^2}{7AK}$.

Tuus, &c.

Cantabrigiae
Junii 13. 1676.

Is. Newton.

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 27 *Augusti* 1676 *data, cum D.* Newtono *communicanda.* Nº LI.

Clarissimo Viro, D. Henrico Oldenburgio, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

LIteræ tuæ, die 26 *Julii* datæ, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clarissimis Viris *Newtono* ac *Collinio* gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa *Newtoni* ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis & Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi Radices Æquationum & Areas Figurarum, per Series Infinitas, prorsus differt a mea: Ut mirari libeat diversitatem itinerum per quæ eodem pertingere licet.

Mercator Figuras Rationales, seu in quibus Ordinatarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest, (ut scilicet indeterminata Quantitas in vinculum non ingrediatur,) quadravit; & ad Infinitas Series reducere docuit, per Divisiones. *Newtonus* autem, per Radicum Extractiones. Mea methodus Corollarium est tantum doctrinæ generalis de *Transformationibus*; cujus ope Figura proposita quælibet, quacunque Æquatione explicabilis, transmutatur in aliam Analyticam æquipollentem; talem ut, in ejus Æquatione, ordinatæ dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam Simplicem Dignitatem seu Infimum gradum. Ita fiet ut quælibet Figura, vel per Extractionem Radicis Cubicæ vel Quadraticæ, *Newtoni* more; vel etiam, Methodo *Mercatoris*,

 per

per ſimplicem Diviſionem; ad Series Infinitas reduci queat.

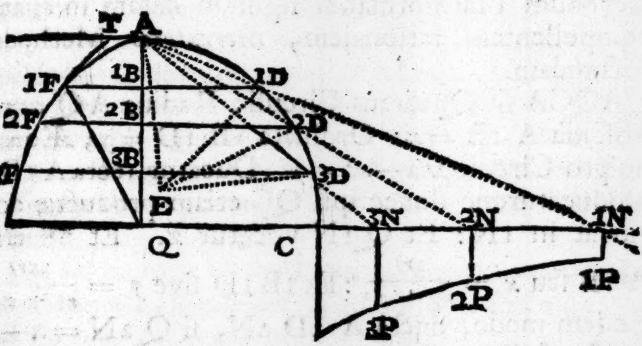
Ego vero ex his Tranſmutationibus ſimpliciſſimam ad rem præſentem delegi. Per quam ſcilicet * unaquæque Figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, Ordinata in nullam prorſus aſcendit Poteſtatem: Ac proinde ſola *Mercatoris* Diviſione per Infinitam Seriem exprimi poteſt.

Ipſa porro * generalis Tranſmutationum methodus, mihi inter potiſſima Analyſeos cenſenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas, & ad Approximationes; ſed & ad ſolutiones Geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia in ſervit. Ejus vero fundamentum vobis candide liberequc ſcribo; perſuaſus quæ apud vos habentu præclara, mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc eſt: Ut figura propoſita rectis innumeris utcunque, mod ſecundum aliquam regulam ſive legem ductis, resolvatur in partes; quæ partes, aut aliæ ipſis æquales, alio ſitu aliave forma reconjunctæ, aliam componant figuram priori æquipollentem ſeu ejusdem Areæ, etſi alia longe figura conſtantem. Unde ad Quadraturas abſolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel ſerie infinita expreſſas Arithmetic jamjam multis modis perveniri poteſt.

Ut intelligatur; Sit Figura AQCDA. Ea, ductis rectis BD parallelis, reſolvi poteſt in Trapezia 1B2D, 2B3D, &c. Sed, ductis rectis convergentibus ED, reſolvi poteſt in Triangula E1D2D, E2D3D, &c.

* Hic modus tranſmutandi figuras Curvilineas in alias ipſis æquales, ejuſdem eſt generis cum Tranſmutationibus *Barrovianis* & *Gregorianis*. Et Conicæ Sectiones hac Methodo ſemper ad Series Infinitas reduci poſſunt per diviſiones. Generalis tamen non eſt: Nam ſi Curva ſit ſecundi generis, incidetur in æquationem quadraticam; ſi tertii generis, in cubicam, ſi quarti, in quadrato-quadraticam, ſi quinti, in quadrato-cubicam, &c. præterquam in caſibus quibuſdam valde particularibus. Per extractiones vero Radicum Problemata facilius ſolvuntur abſque Tranſmutationibus.



Si jam alia sit Curva A 1F 2F 3F, cujus Trapezia 1B 2F, 2B 3F sint Triangulis E 1D 2D, E 2D 3D ordine respondentibus æqualia, tota figura AE 3D 2D 1DA, toti figuræ A 1F 2F 3F 3BA erit æqualis.

Quinetiam Trapezia, Trapeziis conferendo, fieri potest ut 1N 2P, vel quod eodem redit, Rectangulum 1N 2P, sit æquale Trapezio respondenti 1B 2D, sive Rectangulo 1B 2D; tametsi recta 1N 1P non sit æqualis rectæ 1B 1D, modo sit 1N 2N ad 1B 2B ut 1B 1D ad 1N 1P; quod infinitis modis fieri potest.

Quæ omnia talia sunt ut cuivis statim ordine progredienti, ipsa natura duce, in mentem veniant; contineantque Indivisibilium Methodum generalissime conceptam, nec (quod sciam) hactenus satis universaliter explicatam. Non tantum enim Parallelæ & Convergentes, sed & aliæ quæcunque certa lege ductæ, rectæ vel curvæ, adhiberi possunt ad Resolutionem. Quanta autem & quam abstrusa hinc duci possint, judicabit qui methodi universalitatem animo erit complexus. Certum enim est omnes Quadraturas hactenus notas, absolutas vel hypotheticas, nonnisi exigua ejus specimina esse.

Sed nunc quidem sufficerit applicationem ostendere ad id de quo agitur; Series scilicet infinitas,

& modum Transformandi figuram datam in aliam æquipollentem rationalem, *Mercatoris* Methodo tractandam.

AQCA sit Quadrans Circuli: Radius AQ $= r$: Abscissa A 1B $= x$: Ordinata 1B 1D $= y$; Æquatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta A 1D: producaturque donec ipsi QC etiam productæ occurrat in 1N: Et Q 1N vocetur z. Et ** erit A 1B seu $x = \frac{2r^3}{r^2 + z^2}$: Et 1B 1D sive $y = \frac{2zr^2}{r^2 + z^2}$. Eodem modo, ductâ A 2D 2N, si Q 2N $= z - \beta$ (posita scilicet 1N 2N $= \beta$) erit A 2B $=$ $\frac{2r^3}{r^2 + z^2 - 2z\beta + \beta^2}$; & A2B — A 1B, sive recta 1B 2B, erit $\frac{2r^3}{r^2 + z^2 - 2z\beta + \beta^2} - \frac{2r^3}{r^2 + z^2}$. Sive, posita β infinite parva, (post destructiones & divisiones,) erit 1B 2B $= \frac{4r^3z\beta}{\overline{r^2 + z^2}|^2}$. Habita ergo recta 1B 1D, & recta 1B 2B, habebitur valor Rectanguli 1D 2B, multiplicatis eorum valoribus in se invicem; habebitur inquam $\frac{8r^5z^2\beta}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$ pro valore Rectanguli 1D 2B.

Sit jam Curvæ 1P 2P 3P &c. natura pro arbitrio assumpta talis, ut Ordinata ejus 1N 1P (ex data abscissa Q 1N sive z) sit $\frac{8r^5z^3}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$. Ideo quoniam 1N 2N $= \beta$, erit rectangulum 1P 2N, etiam $= \frac{8r^5z^2\beta}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$. Ac proinde æquale Rectangulo 1D 2B, & spatium 1P 1N 3N 3P 2P 1P æquale spatio Circulari respondenti 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Est autem quælibet Ordinata NP rationalis, ex data abscissa QN; quia, positâ QN $= z$, Ordinata NP est $\frac{8r^5z^2}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$, sive $\frac{8r^5z^2}{r^6 + 3r^4z^2 - 3r^2z^4 + z^6}$. Ergo

** *N. B.* D. *Leibnitius* hanc Methodum vulgari more prolixius hic exponit, quam Analysis ejus nova paucis exhibere potuisset, ideoque Analysin illam novam nondum invenerat.

ipsa per Infinitam Seriem Integrorum exprimi potest, Dividendo. Et Spatium talibus Ordinatis comprehensum, æquipollens Circulari, infinita Serie numerorum Rationalium, Methodo *Mercatoris* quadrari potest. Quod cum facillimum sit facere, hic omitto. Neque enim elegantiæ suæ, sed Methodi Generalis explicandæ causa, hoc exemplum assumpsi.

Ita siquis loco Circuli mihi dedisset Curvam, in qua Ordinata ascendisset ad gradum Cubicum, potuissem eam reducere ad Curvam, in qua Ordinata non assurrexisset ultra Quadratum, vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Itaque semper, sive Extractionibus Radicum *Newtonianis* (gradus cujuslibet dati) vel Divisionibus *Mercatoris*, poterit cujuslibet Figuræ spatium inveniri, interventu alterius æquipollentis. Multum autem ad Simplicitatem interest quid eligas.

Omnium vero possibilium Circuli, & Sectoris Conici Centrum habentis cujuslibet, per Series Infinitas quadraturarum, simplicissimam hanc esse dicere ausim quam nunc subjicio.

Sit QA 1F [*Vid. Fig. præcedent.*] Sector, duabus rectis in centro Q concurrentibus & Curva Conica A 1F, ad Verticem A sive Axis extremum perveniente, comprehensus. Tangenti Verticis AT occurrat Tangens 1FT. Ipsum AT vocemus t; & Rectangulum sub Semi-latere Recto in Semi-latus Transversum sit Unitas. Erit * Sector Hyperbolæ, Circuli vel Ellipseos, per Semi-latus Transversum divisus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ &c. Signo ambiguo $\pm$ valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipsi. Unde, posito Quadrato Circumscripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. Quæ expressio, jam Triennio abhinc & ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium possibilium N° LII.

* Vid. pag. 98. lin. penult. & pag. 120. lin. 7.

ſimpliciſſima eſt maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam ſequentem; *

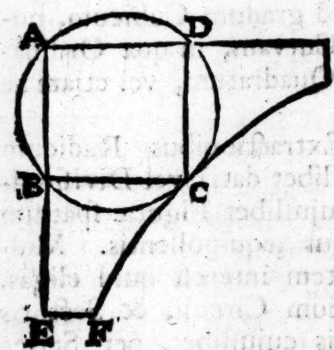
$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}$ &c. $=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{15}\quad\frac{1}{35}\quad\frac{1}{63}\quad\frac{1}{99}$ &c. $=\frac{2}{4}$

$\frac{1}{8}\quad\frac{1}{24}\quad\frac{1}{48}\quad\frac{1}{80}\quad\frac{1}{120}$ &c. $=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{35}\quad\frac{1}{99}$ &c.

$\frac{1}{8}\quad\frac{1}{48}\quad\frac{1}{120}$ &c.



Ubi $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ &c. exprimit Aream Circuli ABCD, & $\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}$ &c. aream Hyperbolæ æquilateræ BCEF, cum ſit BC dupla ipſius EF, & quadratum inſcriptum $=\frac{1}{2}$. Numeri 3, 8, 15, 24, &c. ſunt Quadrati Unitate minuti.

Viciſſim, ‡ ex Seriebus Regreſſuum pro Hyperbola hanc inveni. Si ſit numerus aliquis Unitate minor $1-m$, ejuſque Logarithmus Hyperbolicus l. Erit $m=\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}-\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Si numerus ſit major Unitate, ut $1+n$; tunc pro eo inveniendo mihi etiam ‡ prodiit Regula, quæ in *Newtoni* Epiſtola expreſſa eſt; ſcilicet erit $n=\frac{l}{1}\,\frac{l^2}{1\times2}+\;+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque efficio ut ea poſſim uti, etiam cum major eſt Unitate numerus $1+n$. Nam idem eſt Logarithmus pro $1+n$ & pro $\frac{1}{1+n}$. Unde, ſi $1+n$ ſit major Unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor Unitate. Fiat ergo $1+m=\frac{1}{1+n}$, ac in-

* Vide Acta Lipſica *Feb.* 1682.

venta

venta m, habebitur & $1+n$ numerus quæsitus.

Quod regressum ex Arcubus attinet, ‡ incideram ego directe in Regulam, quæ ex dato Arcu Sinum Complementi exhibet. Nempe, Sinus Complementi $= 1 - \frac{a^2}{1\times2} + \frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c, Sed postea quoque deprehendi ex ea, illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto, qui est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times2\times3} + \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c, posse demonstrari.

Quod tribus verbis sic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, seu omnium $1 - \frac{a^2}{1\times2} + \frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times2\times3} + \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (seu Arcui in locis debitis insistentium) æquatur Sinui Recto ducto in Radium, ut notum est Geometris; id est, æquatur ipsi Sinui Recto; quia Radius hic est Unitas. Ergo Sinus Rectus $= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times2\times3} + \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$, &c. Hinc etiam, ex dato Arcu & Radio, sine ulla prorsus aliorum notitia, haberi potest Area Segmenti Circularis duplicati: quæ est $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus & Minuta &c. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur hæc expressio: Ut Sinus Complementi c ponatur $= 1 - \frac{a^2}{1\times2} + \frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$;

‡ *N. B.* Methodum perveniendi ad has Series *Leibnitius* a *Newtono* jam modo acceperat, idque ex ipsius rogatu. Imo Series ipsas a *Newtono* una cum Methodo perveniendi ad easdem jam modo acceperat, & pro Hyperbola signum tantum mutavit; pro Circulo Sinum Versum a *Newtono* acceptum subduxit a Radio, ut haberet Sinum complementi,

quoniam sola, memoria retenta, omnibus casibus & operationibus, directis scilicet simul & reciprocis, sufficit; Quod ideo fit, quoniam Æquatio $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ est plana. Unde si vicissim quæras Arcum ex Sinu Complementi, radix extrahi potest; adeoque fiet Arcus $a = \sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$ exacte satis ad usum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error æquationis non est $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia possent dici, quæ his fortasse elegantia & exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus ut plerumque, Methodis Generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere æstimanda sunt, nisi quod artem Inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quæ obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac Methodo Æquationum quoque utcunque Affectarum Radices per Infinitam Seriem dari possint, sine ulla Extractione; quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim ut Clarissimus *Newtonus* nonnulla quoque amplius explicet; ut originem Theorematis quod initio ponit: Item, Modum quo quantitates p, q, r, in suis Operationibus invenit: Ac denique, Quomodo in Methodo Regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere: quoniam tibi e vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quæ suppressit, ex sola earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere *Newtonum*:

tonum:

tonum: Quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper præclari nos doceat (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio; quæ Doctissimus *Collinius* communicare gravatus non est. N° LIII.
Vellem adjecisset appropinquationis *Gregorianæ* linearis Demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorem, etiam in infinitum euntem; quæ fiat sine ulla Bisectione Anguli, imo, sine supposita Circuli Constructione; solo Rectarum ductu.

Vellem *Gregoriana* omnia conservari. Fuit enim his certe studiis promovendis aptissimus: Cæterum ejus demonstrationi editæ, de Impossibilitate Quadraturæ absolutæ Circuli & Hyperbolæ, multa haud dubie desunt.

De Æquationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis; sive, quod idem est, tollendis Æquationum potestatibus intermediis, multa & ego meditatus sum; & jam Vere anni superioris Specimina *Hugenio* communicaveram Regularum *Cardanicis* similium. Seriem enim habebam ejusmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus & *Cardanica* continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales. Perspexi tamen inde veram Methodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libenter ingeniosissimo *Tschürnhausio* relinquo; qui hic ad eadem quæ ego habebam Specimina, imo & alia præterea, etiam de suo pervenit.

Ex iis quæ *Collinius* ait de *Gregoriana* Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo constat ejus substantia.

Imaginariarum quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem, frustra putem sperari, imo quæri. Neque enim illæ ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt:

sunt: Et Veræ Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis & Argumentis deprehendi.

Exempli gratia, $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur; nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$: supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via hæc summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejusmodi formularum (tunc cum Extractio ex singulis Binomiis fieri nequit) ad oculum ostendi non potest; mente tamen intelligitur. Quare frustra *Cartesius* aliique expressiones *Cardanicas* pro particularibus habuere. Siquis posset invenire Quadraturam Circuli & ejus Partium, ex data Hyperbolæ & ejus Partium quadratura, is posset eas tollere; modo in ipsam Quadraturam imaginariæ illæ rursus ingrediantur.

Cæterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices æquationum irrationales, necessario sequitur res satis Paradoxa: Scilicet omnes Æquationes gradus Octavi, Noni, Decimi, posse ad gradum Septimum reduci. Itaque & omnia Problemata ad Decimum gradum usque occurrentia possunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi subeundi erunt illi qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; sed facillimi ipsi qui ante meditabitur: cum, ut prævideo, ipsa natura rei ducat ad compendia quædam per quæ spes est Calculi magnam partem abscindi; remque elegantibus artificiis, Ingenii potius vi quam Calculi labore, transigi posse.

Sed siquis laborem non subterfugeret, eum docere possum Methodum Analyticam generalem i[...]

fallibilem, per quam omnium Æquationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda qui Calculo delectarentur. Consilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quæ non minoris futuræ essent usus in Analysi, quam Tabulæ Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis versatus sit, eum progressiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulæ pars sine labore continuari possit. Nihil est quod norim in tota Analysi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata statim soluta haberentur, aut levi opera possint inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore, Arte scilicet Combinatoria generali ac vera. Cujus vim ac potestatem nescio an quisquam hactenus sit consequutus. Ea vero nihil differt ab Analysi illa suprema, ad cujus intima, quantum judicare possum, *Cartesius* non pervenit. Est enim ad eam constituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus est Analysi Axiomatum. Sed non miror ista nemini satis considerata: Quia plerumque facilia negligimus; & multa, quæ clara videntur, assumimus. Quod quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus summum; nec genus Calculi etiam non-Mathematicis accommodati obtinebimus.

Optarim Cl. *Pellium* generalia sua Meditata, & illud speciatim quod memoras *Cribrum Eratosthenis*, non supprimere. Nam etsi omnia forte quæ destinarat non absolverit; meditata tamen ipsa & Consilia egregiorum Virorum non perire publici interest. Utilia quoque futura sunt quæ de Sinuum Tabula ad Æquationes accommodanda habet. Item de Limitibus & Radicibus.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematibus *Diophantæis*) ad Series Infinitas

finitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis aliis) Problemata * methodi Tangentium inversæ; quæ etiam *Cartesius* in potestate non esse fassus est.

In tomo 3° Epistolarum, una habetur ad *Beaunium*; in qua, ad propositas a *Beaunio*, Curvas quasdam invenire conatur; quarum una est Ludus Naturæ, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam & Ordinatim-applicatam ex Curva ad directricem, sit semper idem; recta scilicet constans. Hanc Curvam nec *Cartesius* nec *Beaunius* nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, cæpi quærere, statim certa Analysi solvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum: quamquam maximi momenti esse sciam. Ac de his quidem nunc satis.

Ego id agere constitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; problemataque circa Elateria, & Aquas, & Pendula, & Projecta, & Solidorum Resistentiam, & Frictiones, &c. definiam: Quæ hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc esse in potestate; ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonstrationibus satisfeci; neque quicquam amplius in eo genere desidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphysico pulcherrimo; quod non minoris est momenti circa Motum, quam hoc, *totum esse majus parte*, circa magnitudinem.

De Centro-baricis quoque singularem quendam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diver-

* Si æquationes differentiales D. *Leibnitio* jam innotuissent, haud dixisset Problemata Methodi Tangentium inversæ ab Æquationibus non pendere.

fas

as contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica magno usui futuras. Hæc ubi (Deo volente) absolvero, reliquum temporis, quod scilicet Philosophicis meditationibus destinare fas erit, Naturæ indagationi debeo.

Tschürnhausius proximo Tabellione scribet.

Excerpta ex Epistola D. Ehrenfried de Tschürnhause *ad D.* Oldenburgum, Parisiis 1 Septemb. 1679 *data, cujus extat exemplar manu D.* Collins *descriptum.* Nº LIV.

Expectabam cum desiderio responsum, cum aliquot abhinc mensibus ad te literas meas transmiseram; sed nec ex modo datis colligere licet eas receptas fuisse. Interim admodum oblectatus fui, hisce conspectis quæ ad D. *Leibnitium* exarasti; maximeque me tibi devinxisti, quod me participem volueris facere tam ingeniosarum inventionum, & promotionis Geometriæ tam pulchræ quam utilis. Statim cursim eas pervolvi, ut viderem num forte inter hasce Series Infinitas existeret * ea qua ingeniosissimus D. *Leibnitius* Circulum, imo quamvis sectionem Conicam (centro finita distantia gaudentem) quadravit, tali ratione ut mihi persuadeam simpliciorem viam, nec quoad linearem constructionem, nec numeralem expressionem, nunquam visum iri; quique hisce porro insistens, generalem adinvenit Methodum figuram quamvis datam in talem rationalem transmutandi, quæ per solum inventum (admodum præstans meo judicio) D. *Mercatoris*, ad Seriem Infinitam posset reduci; sed hac de materia, cum ipse non ita pridem mentem suam declaravit, non

* Annon D. *Tschürnhause* viderat Excerpta ex *Gregorii* Epistolis cum D *Leibnitio* communicata, ubi habetur Series *Gregorii* quam *Leibnitio* hic tribuit? Vide pag. 128.

opus

opus eſt ut prolixior ſim. Verum ut ad ſpecimina per-
quam ingenioſa D. *Newtoni* revertar; hæc non potu-
ere non mihi placere, tam ob utilitatem qua ſe tam
late ad quarumvis quantitatum dimenſiones, ac a-
lia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt;
quam ob deductionem harum a fundamentis non
minus generalibus quam ingenioſis derivatam: non
obſtante quod exiſtimem, ad quantitatem quamvis
ad infinitam ſeriem æquipollentem reducendam
fundamenta adhuc dari & ſimpliciora & univerſa-
liora, quam ſunt fractionum & irrationalium redu-
ctio ad tales Series, ope Diviſionis aut Extractio-
nis; quæ mihi tale quid non niſi per acciden-
præſtare videntur: cum hæc ſucceſſum quoque ha-
beant, licet non adſint fractiones aut irrationale
Quantitates. Similia porro quæ in hac re præ-
ſtitit eximius ille Geometra *Gregorius*, memorand
certe ſunt, & quidem optime famæ ipſius conſu-
turi, qui ipſius relicta Manuſcripta luci publicæ u
exponantur operam navabunt.

N° LV. *Epiſtola D.* Newtoni *poſterior, ad D.* Oldenbur-
gum, *Octob.* 24, 1676 *data, cum* D. Leibniti
communicanda.

Vir Digniſſime,

QUanta cum voluptate legi Epiſtolas Clariſſi-
morum Virorum D. *Leibnitii* & D. *Tſchirn-
hauſii* vix dixerim.

Perelegans ſane eſt *Leibnitii* methodus perven-
endi ad Series Convergentes: & ſatis oſtendiſſet in-
genium Authoris, etſi nihil aliud ſcripſiſſet. Sed qu
alibi per Epiſtolam ſparſit ſuo nomine digniſſim
efficiunt etiam ut ab eo ſperemus maxima. Diver-
ſitas modorum quibus eodem tenditur eo mag
placuit, quod mihi tres Methodi perveniendi a

eju

ejuſmodi Series innotuerant; adeo ut novam nobiſcum communicandam vix expectarem.

Unam e meis prius deſcripſi: jam addo aliam; illam ſcilicet qua primum incidi in has Series. Nam incidi in eas antequam ſcirem Diviſiones & Extractiones Radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum eſt fundamentum Theorematis ſub initio Epiſtolæ prioris poſiti, quod D. *Leibnitius* a me deſiderat.

Sub initio ſtudiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in * opera Celeberrimi *Wallisii* noſtri, conſiderando Series quarum intercalatione ipſe exhibet Aream Circuli & Hyperbolæ; utpote quod in Serie Curvarum, quarum Baſis ſeu Axis communis ſit x, & Ordinatim-applicatæ $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}.\ \overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}.\ \overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}.\ \overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}.\ \overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}.\ \overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}.$ &c. ſi Areæ alternarum quæ ſunt x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. interpolari poſſent, haberemus Areas intermediarum; quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ eſt Circulus: ad has interpolandas notabam, quod in omnibus, primus terminus eſſet x, quodque ſecundi termini $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, &c. eſſent in Arithmetica progreſſione; & proinde quod duo primi termini Serierum intercalandarum deberent eſſe $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$, &c.

Ad reliquas intercalandas conſiderabam, quod Denominatores 1, 3, 5, 7, &c. erant in Arithmetica progreſſione; adeoque ſolæ Numeratorum Coefficientes numerales eſſent inveſtigandæ. Hæ autem in alternis datis Areis erant figuræ poteſtatum numeri undenarii; nempe 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Hoc eſt, primo 1; deinde 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1. &c.

* Vide D. *Wallisii* Arithmeticam infinitorum, Prop. 118, 121, Ejuſque Algebram, Cap. 82.

Quæ-

Quærebam itaque, quomodo in his Seriebus, ex datis duabus primis figuris, reliquæ derivari poſſent. Et inveni quod poſita ſecunda figura m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ &c.

Exempli gratia; Sit (terminus ſecundus) $m=4$; & erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc eſt 6, tertius terminus; & $6 \times \frac{m-2}{3}$, hoc eſt 4, quartus; & $4 \times \frac{m-3}{4}$, hoc eſt 1, quintus; & $1 \times \frac{m-4}{5}$, hoc eſt 0, ſextus; quo ſeries in hoc caſu terminatur.

Hanc Regulam itaque applicui ad Series interſerendas. Et cum, pro Circulo, ſecundus terminus eſſet $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, poſui $m=\frac{1}{2}$; & prodierunt termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ ſive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ ſive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ ſive $-\frac{5}{128}$; & ſic in infinitum. Unde cognovi deſideratam Aream ſegmenti Circularis eſſe $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ &c.

Et eadem ratione prodierunt etiam interſerendæ areæ reliquarum Curvarum: ut & area Hyperbolæ & cæterarum alternarum in hac Serie $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{5}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{7}{2}}$, &c.

Et eadem eſt ratio intercalandi alias Series, idque per intervalla duorum pluriumve terminorum ſimul deficientium.

Hic fuit primus meus ingreſſus in has meditationes: qui e memoria ſane exciderat, niſi oculos in adverſaria quædam ante paucas ſeptimanas retuliſſem.

Ubi

Ubi vero hæc didiceram, mox considerabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$, &c. hoc est, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, &c. eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: & ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7, &c. in terminis exprimentibus areas; hoc est, coefficientes terminorum quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeoque (exempli gratia) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}z^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c.

Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium in infinitas Series, per Regulam quam posui initio Epistolæ prioris, antequam scirem Extractiones Radicum.

Sed, hac cognita, non potuit altera me diu latere. Nam ut probarem has operationes, multiplicavi $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c. in se; & factum est $1-xx$, terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei. Atque ita $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c. bis in se ductum produxit $1-xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum Demonstratio, sic me manuduxit ad tentandum e converso, num hæ Series, quas sic constitit esse Radices quantitatis $1-xx$, non possent inde extrahi more Arithmetico. Et res bene successit. Operationis forma in Quadraticis Radicibus hæc erat.

M 1 —

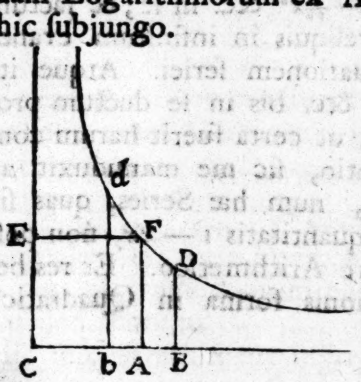
$$1 - xx\,(1 - \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 \ \&c.$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \hline 0 - xx \\ -xx + \tfrac{1}{4}x^4 \\ \hline -\tfrac{1}{4}x^4 \\ -\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^6 + \tfrac{1}{64}x^8 \\ \hline -\tfrac{1}{8}x^6 - \tfrac{1}{64}x^8 \end{array}$$

His perſpectis neglexi penitus interpolationem Serierum; & has operationes tanquam fundamenta magis genuina ſolummodo adhibui. Nec latui Reductio per Diviſionem; res utique facilior.

Sed & Reſolutionem affectarum Æquationum mox aggreſſus ſum, eamque obtinui. Unde ſimu Ordinatim-applicatæ, Segmenta Axium, aliæqu quælibet Rectæ, ex Areis Curvarum vel Arcubu datis innotuere. Nam regreſſio ad hæc nihil indi gebat præter Reſolutionem Æquationum, quibu Areæ vel Arcus ex datis rectis dabantur.

Nº LVI. Eo tempore Peſtis ingruens, [*quæ contigit ann* 1665, 1666,] coegit me hinc fugere, & alia co gitare. Addidi tamen ſubinde condituram qua dam Logarithmorum ex Area Hyperbolæ, qua hic ſubjungo.



Sit dFD Hyperbo cujus Centrum C, Ve tex F, & Quadratu interjectum CAFE 1. In AC cape AB, hinc inde $= \frac{1}{10}$ ſeu 0. Et, erectis perpen culis BD, bd ad H perbolam terminat erit ſemi-ſumma ſ tiorum AD & Ad

$$0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7} \ \&c. \ \& \text{ ſemi-d}$$

feren

ferentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ &c. Quæ reductæ ſic ſe habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum ſumma 0.1053605156577 eſt Ad; & differentia 0.0953101798043 eſt AD. Et eadem ratione poſitis AB, Ab hinc inde = 0.2, obtinebitur Ad = 0.2231435513142, & AD = 0.1823215567939. Habitis ſic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, & 1.2; cum ſit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$; & 0.8 & 0.9, ſint minores Unitate: adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1.2, & habebis 0.6931471805597 Logarithmum Hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde Log. 0.8 (ſiquidem ſit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$,) & habebis 2.3025850929933 Logarithmum numeri 10: Indeque per Additionem ſimul prodeunt Logarithmi numerorum 9 & 11: Adeoque omnium Primorum horum 2, 3, 5, 11 Logarithmi in promptu ſunt. Inſuper, ex ſola depreſſione numerorum ſuperioris computi per loca Decimalia & Additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; ut & horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002. Et inde per Additionem & Subductionem prodeunt Logarithmi Primorum 7, 13, 17, 37, &c. Qui una cum ſuperioribus, per Logarithmum numeri 10 diviſi, evadunt veri Logarithmi in Tabulam inſerendi. Sed hos poſtea propius obtinui.

M 2 Pudet

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otioſus eo tempore produxi. Nam tunc ſane nimis delectabar inventis hiſce. Sed ubi prodiit ingenioſa illa * *Nicolai Mercatoris* Logarithmotechnia (quem ſuppono ſua primum inveniſſe) cœpi ea minus curare; ſuſpicatus, vel eum noſſe Extractionem Radicum æque ac Diviſionem Fractionum; vel alios ſaltem, Diviſione patefacta, inventuros reliqua, prius quam ego ætatis eſſem maturæ ad ſcribendum.

N° LVII. Eo ipſo tamen tempore quo liber iſte prodiit, communicatum eſt per amicum D. *Barrow* (tunc Matheſeos Profeſſorem *Cantab.*) cum D. *Collinio*, ‡ compendium quoddam Methodi harum Serierum; in quo ſignificaveram Areas & Longitudines Curvarum omnium, & Solidorum ſuperficies & Contenta, ex datis Rectis; & vice verſa, ex his datis Rectas determinari poſſe: & Methodum ibi indicatam illuſtraveram diverſis ſeriebus.

Suborta deinde inter nos Epiſtolari conſuetudine; D. *Collinius*, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non deſtitit ſuggerere ut hæc publici juris facerem. Et ante annos quinque [1671] cum ſuadentibus amicis conſilium ceperam eden-

* Mathematici priores invenerunt hoc Theorema, quod *ſumma terminorum progreſſionis Geometricæ in infinitum pergentis eſt ad terminorum primum & maximum, ut hic terminus ad differentiam duorum terminorum primorum.* Idem demonſtratur Arithmetice multiplicando extrema & media. Demonſtravit *Walliſius* dividendo rectangulum ſub mediis per extremum ultimum. Vide *Walliſii* opus Arithmeticum Anno 1657 editum cap. 33. §. 68. Per *Walliſii* diviſionem *Mercator* demonſtravit & auxit Quadraturam Hyperbolæ a D. *Brounker* prius inventam. Et *Gregorius* idem demonſtravit Geometrice. Sed horum nemo methodum generalem quadrandi curvas per diviſionem invenit. *Mercator* hoc nunquam profeſſus eſt. *Gregorius* ejuſmodi methodum, licet vir acutiſſimus & literis *Collinii* admonitus, vix tandem invenit. *Newtonus* invenit per interpolationem Serierum, & poſtea diviſionibus & extractionibus radicum, ut notioribus uſus eſt.

‡ Analyſin intelligit per Æquationes Infinitas ſupra impreſſam, de qua vid. pag. 65, 66, 67.

d

di Tractatum de Refractione Lucis, & Coloribus, quem tunc in promptu habebam; cœpi de his Seriebus iterum cogitare; & * Tractatum de iis etiam conscripsi, ut utrumque simul ederem.

Sed, ex occasione Telescopii Catadioptrici, Epistolâ ad te missâ qua breviter explicui conceptus meos de Natura Lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de Impressione istius Epistolæ. Et subortæ statim per diversorum Epistolas (Objectionibus aliisque refertas) crebræ interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt; & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore *Jacobus Gregorius*, ex unica quadam Serie e meis quam D. *Collinius* ad eum transmiserat, post multam considerationem (ut ad *Collinium* rescripsit) pervenit ad eandem Methodum, & Tractatum de ea reliquit quem speramus ab Amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio quo pollebat non potuit non adjicere de suo nova multa, quæ rei Mathematicæ interest ut non pereant.

Ipse autem Tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti a proposito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea qua decreveram explicare modum solvendi Problemata, quæ ad Quadraturas reduci nequeunt; licet aliquid de Fundamentis ejus posuissem. Cæterum in Tractatu isto, Series Infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congessi, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes, quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve tecum communicavit;

* Hujus Tractatus meminit D. *Collins* in Epistolis duabus supra impressis, pag. 101, 102. Et *Newtonus* in Epist. supra impressa, p. 105.

de qua tu (suggerente *Collinio*) rescripsisti eandem * mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget Demonstratione, prout ego operor. Habito meo Fundamento nemo potuit Tangentes aliter ducere, nisi volens de recta via deviaret.

Quinetiam non hic hæretur ad Æquationes Radicalibus unam vel utramque Indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas; sed absque aliqua talium Æquationum Reductione (quæ opus plerumque redderet immensum) Tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quæstionibus de Maximis & Minimis; aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor.

Fundamentum harum Operationum, satis obvium quidem, (quoniam jam non possum Explicationem ejus prosequi,) sic potius celavi ‡ *6accda 13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx*.

Hoc fundamento conatus sum etiam reddere † speculationes de Quadratura Curvarum simpliciores; pervenique ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candide agam, ecce primum Theorema.

* Vide Epistolam *Newtoni* supra impressam, pag. 104, 105, 106.

‡ Hoc est, *Data Æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire; & vice versa.* Prior pars Problematis solvitur per Regulam Binomii initio Epistolæ superioris *Newtonianæ* traditam & initio hujus demonstratam. Nam si terminus secundus Binomii sit momentum termini primi, terminus secundus Seriei, in quam dignitas Binomii per Regulam illam resolvitur, erit momentum Dignitatis Binomii. Posterior pars Problematis solvitur regrediendo a momentis ad fluentes: quod ubi hæretur fieri solet quadrando figuras; & ubi ad quadraturas hæretur, extrahendo fluentes per Regulas quatuor, quarum duas *Newtonus* in Epistola priore explicuit, duas alias sub finem hujus Epistolæ literis transpositis occultavit, ut mox dicetur.

† Hujusmodi Theoremata *Newtono* ante annum 1669 innotuisse patet, per Analysin supra impressam pag. 90, lin. 17, & per Epistolam *Collinii* ad *Thomam Strode* 26 Julii 1672 data, pag. 103, lin. 32, 33, 34. ut & per hanc Epistolam.

Ad

Ad Curvam aliquam sit $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda}$ Ordinatim-applicata, termino abscissæ seu basis z normaliter insistens: ubi literæ d, e, f denotant quaslibet quantitates Datas; & θ, η, λ indices Potestatum sive Dignitatum quantitatum quibus affixæ sunt. Fac $\frac{\theta+1}{\eta}=r$, $\lambda+r=s$, $\frac{d}{\eta f} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda+1}=Q$, & $r\eta-\eta=\varpi$: & Area Curvæ erit Q in $\frac{z^{\pi}}{s}-\frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}}+\frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{\eta}}-\frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{\eta}}+\frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^{\eta}}$ &c. literis A, B, C, D. &c. denotantibus terminos proxime antecedentes; nempe A terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum $-\frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}}$ &c. Hæc Series, ubi r fractio est vel numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi vero r integer est & affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot sunt Unitates in eodem r; & sic exhibet Geometricam Quadraturam Curvæ. Rem Exemplis illustro. N° LVIII.

Exemplum 1. Proponatur Parabola, cujus Ordinatim-applicata sit $\sqrt{az}$. Hæc in formam Regulæ reducta fit $z^{0} \times \overline{0+az^{1}}|^{\frac{1}{2}}$. Quare $d=1$, $\theta=0$, $e=0$, $f=a$, $\eta=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeoque $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$, $Q=\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$, $\pi=0$. Et erit Area quæsita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc est, $\frac{2}{3}z\sqrt{az}$. Et sic in genere si cz^{η} ponatur Ordinatim-applicata, prodibit Area $\frac{c}{\eta+1}z^{\eta+1}$.

Exempl. 2. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^{4}z}{c^{4}-2cczz+z^{4}}$. Hæc per Reductionem fit $a^{4}z \times \overline{cc-zz}|^{-2}$; vel etiam $a^{4}z^{-3} \times \overline{-1+ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori casu est d a^{4}, $\theta=1$, $e=cc$, $f=-1$,

$\eta = 2$, $\lambda = -2$. Adeoque $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc est $-\frac{a^4}{2cc - 2zz}$, $\pi = 0$. Et Area Curvæ Q in $-\frac{z^0}{1}$, id est $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu, est $d = a^4$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$, id est $-\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\varpi = 0$. Et Area $= Q$ in $-\frac{z^0}{1}$, hoc est $\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibus diversimode exhibetur, quatenus computatur a diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores Arearum facilis est.

Exempl. 3. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz + zz}$: hoc est, per Reductionem ad debitam formam; vel $a^5 z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$; vel $a^5 z^{-4} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Et erit, in priori casu, $d = a^5$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = -\frac{7}{2}$, &c. Quare, cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum. Hic est $d = a^5$, $\theta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{a^5}{b} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, seu $-\frac{a^5z + a^5b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et Area, Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc est $\frac{-30bb + 24bz - 16zz}{105bbzz}$, in $-\frac{a^5z + a^5b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$.

Exempl. 4. Sit denique Ordinatim-applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3aacz^{\frac{4}{3}} - a^3zz}}$. Hæc ad formam Regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indeque e[st] $d = b$, $\theta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$

$r =$

$r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = -\frac{3b}{2a} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}\big|^{\frac{2}{3}}$, $\pi = \frac{2}{3}$. Et Area $Q \times \frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times -\frac{5c}{7a}$, id est $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}} + 75bc}{28aa} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}\big|^{\frac{2}{3}}$.

Quod ſi res non ſucceſſiſſet in hoc caſu, exiſtente r vel fractione vel numero negativo; tunc tentaſſem alterum caſum, purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in Ordinatim-applicata a Coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc eſt reducendo Ordinatim-applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{1}{3}} \times \overline{-a + cz^{-\frac{2}{3}}}\big|^{-\frac{3}{3}}$. Et ſi r in neutro caſu fuiſſet numerus integer & affirmativus, concluſiſſem Curvam ex earum numero eſſe quæ non poſſunt Geometrice quadrari. Nam, quantum animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium Geometricam Quadraturam admittentium Curvarum, quarum Ordinatim-applicatæ conſtant ex Poteſtatibus, Radicibus, vel quibuſlibet Dignitatibus Binomii cujuſcunque: licet non directe, ubi index Dignitatis eſt numerus Integer.

At, quando hujuſmodi Curva aliqua non poteſt Geometrice quadrari; ſunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus, vel ſaltem cum aliis Figuris Simpliciſſimis quibuſcum poteſt comparari: ad quod ſufficit etiam hoc ipſum unicum jam deſcriptum Theorema, ſi debite concinnetur.

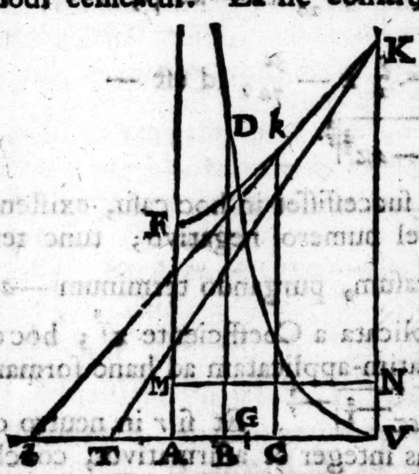
Pro Trinomiis etiam, & aliis quibuſdam, *Regulas quaſdam concinnavi.

Sed in ſimplicioribus vulgoque celebratis Figuris, vix aliquid relatu dignum reperi quod evaſit

* Hæ omnes Regulæ Propoſitionem quintam ſextam ſeptimam & octavam Libri de Quadraturis conſtituunt.

ali-

aliorum conatus; niſi forte *Longitudo Ciſſoidis* ejuſmodi cenſeatur. Ea ſic conſtruitur.



Sit VD Ciſſois, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V Vertex, AF Aſymptotos ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demiſſum. Cum ſemi-axe AF = AV, & ſemi-parametro AG = [illegible] AV, deſcribatur Hyperbola FkK, & inter AB & AV ſumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula Ck, VK Hyperbolæ occurrentia in *k* & K; Et agantur rectæ KT, *kt* tangentes Hyperbolam in eiſdem K & *k*, & occurrentes AV in T & *t*; & ad AV conſtituatur rectangulum AVNM æquale ſpacio TK*kt*. Et Ciſſoidis VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonſtratio perbrevis eſt. Sed ad Infinitas Series redeo.

Quamvis multa reſtent inveſtiganda circa modos approximandi, & circa diverſa Serierum genera quæ poſſunt ad id conducere: tamen vix cum D. *Tſchürnhauſio* ſperaverim dari poſſe aut ſimpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quam ſunt Diviſiones & Extractiones Radicum, quibus *Leibnitius* & ego utimur; Saltem non generaliora: quia pro Quadratura & Εὐθυνώσει Curvarum ac ſimilibus, nullæ poſſunt dari Series ex hiſce ſimplicibus terminis Algebraicis (unicam tantum indefinitam Quantitatem involventibus) conſtantes, quas non licet hac Methodo colligere.

Nam non poſſunt eſſe plures convergentes Series

ries

ies ad idem determinandum, quam sunt indefinitæ Quantitates, ex quarum Potestatibus Series conflentur: & ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate Seriem novi colligere; & idem credo *Leibnitio* in potestate esse.

Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere, pro conflanda Serie, quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quæsitum dependeat; & methodus, quam ipse nobiscum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commode deduci potest ad Fractiones; quæ per solam Divisionem evadant Series Infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ Quantitates pro Seriebus conflandis adhiberi possunt, per methodum istam qua affectæ Æquationes resolvuntur, dummodo resolvantur in propriis terminis; hoc est, conficiendo Seriem ex solis terminis quos æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his Divisionibus & Extractionibus problemata resolvi *per Accidens*: Siquidem hæ operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares Operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgo notam.

Quod autem ad simplicitatem methodi attinet; solim Fractiones & Radicales absque prævia Reductione semper resolvi in Series Infinitas: Sed, ubi perplexæ quantitates occurrunt, tentandæ sunt omnimodæ Reductiones; sive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas; sive per methodum Transmutatoriam *Leibnitii*, aut alio quocunque modo qui occurrat. Et tunc Resolutio in Series per Divisionem & Extractionem opportune adhibebitur.

Hic autem præcipue nitendum est, ut Denominatores Fractionum, & Quantitates in Vinculo Radicum, reducantur ad quam paucissimas & minime compositas; & ad tales etiam quæ in Seriem

abeunt

abeunt citissime convergentem, etsi Radices neque convertantur in Fractiones neque deprimantur. Nam, per Regulam initio alterius Epistolæ, Extractio altissimarum Radicum æque simplex & facilis est ac Extractio Radicis Quadraticæ vel Divisio: & Series quæ per Divisionem eliciuntur solent minime omnium Convergere.

Nº LIX. Hactenus de Seriebus unicam indefinitam Quantitatem involventibus locutus sum. Sed possunt etiam, perspecta Methodo, Series ex duabus vel pluribus assignatis Indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejusdem methodi possunt Series ad omnes Figuras efformari *Gregorianis* ad Circulum & Hyperbolam editis affines; hoc est, quarum ultimus terminus exhibebit quæsitam Aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire.

Possunt denique Series ex terminis compositis eadem Methodo constitui. Quemadmodum, si sit $\sqrt{aa-ax+\frac{x^3}{a}}$ Ordinatim-applicata Curvæ alicujus; pono $aa-ax=zz$, & ex Binomio $zz+\frac{x^3}{a}$ extracta Radice, prodibit $z+\frac{x^3}{2az}-\frac{x^6}{8aaz^3}$ &c. Cujus Seriei omnes termini quadrari possunt per Theorema jam ante descriptum. Sed hæc minoris facio, quod ubi Series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam Methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quæsitum.

Ejus fundamentum est commoda, expedita, generalis solutio hujus Problematis, *Curvam Geometricam describere, quæ per data quotcunque Puncta transibit.*

Docuit *Euclides* descriptionem Circuli per Tria data Puncta. Potest etiam Conica Sectio describi per Quinque data Puncta: & Curva Trium Dimensionum per Septem data Puncta; (adeo ut in potestate habeam descriptionem omnium Curvarum

rum

um istius ordinis, quæ per Septem tantum puncta determinantur.) Hæc statim Geometrice fiunt nullo Calculo interposito. Sed superius Problema est alterius generis: & quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter se habet. Est enim fere ex pulcherrimis quæ solvere desiderem.

Seriei a D. *Leibnitio* pro Quadratura Conicarum Sectionum propositæ, affinia sunt Theoremata quædam, quæ pro Comparatione Curvarum cum Conicis Sectionibus in Catalogum * dudum retuli.

Possum utique cum Sectionibus Conicis Geometrice comparare Curvas omnes (numero infinities infinitas,) quarum Ordinatim-applicatæ sunt

$$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ vel } dz^{\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}: \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fx^{\eta}+gz^{2\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}}{g+hz^{\eta}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{g+hz^{\eta}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} \text{ vel } dz^{\eta-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} \text{ \&c.}$$

Hic d, e, f, g significant quasvis datas Quantitates cum suis Signis $+$ & $-$ affectas; z Axem vel Basem Curvæ; & η, 2η, $\frac{1}{2}\eta-1$, $\frac{3}{2}\eta-1$, $\eta-1$, $2\eta-1$ Indices Potestatum vel Dignitatum

* Ex his patet Propositiones *Newtoni* de Quadratura Curvarum diu ante annnm 1676 inventas fuisse.

z,

z, sive sint Affirmativi vel Negativi, sive Integ
vel Fracti; & singula bina Theoremata sunt du
primi termini Seriei in infinitum progredienti
In Tertio & Quarto, $4eg$ debet esse non maju
quam ff, nisi e & g sint contrarii Signi. In cæter
nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe, Secun
dum, Tertium, Quartum, Quintum, & Decimum
tertium) ex Areis duarum Conicarum Sectionu
conjunctis constant. Alia quædam (ut Nonum
Decimum, & Duodecimum) sunt aliter satis Com
posita. Et omnia quidem in continuatione Pro
gressionum cito evadunt compositissima; adeo u
vix per Transmutationem figurarum, quibus *Ja
cobus Gregorius* & alii usi sunt, absque ulterio
fundamento inveniri posse putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his ob
tinere potui, antequam abstraherem a contempla
tione Figurarum, & rem totam ad simplicem con
siderationem solarum Ordinatim-applicatarum re
ducerem. Sed, cum hæc, & hisce generalior
sint in potestate; non dubitabitur, credo, de Bi
nomialibus longe facilioribus quæ in his conti
nentur, & prodeunt ponendo literam aliquam e ve
f vel $g = 0$; & $\eta = 1$ vel 2; etsi Series, in qu
ista resolvantur, non posuerim in Epistola prior
nedum forte computaverim; intentus, non in om
nia particularia enumeranda, sed in illustrandam
Methodum per unam & alteram in singulis re
rum generibus instantiam, quæ ad ostendendam e
jus generalitatem sufficere videbatur.

N° LX. Cæterum hæc Theoremata dant Series plus
quam uno modo. Nam primum si ponatur $f =$
& $\eta = 1$, evadit $\frac{d}{e+gzz}$; unde prodit Series nob
communicata. Sed si ponatur $2eg = ff$, & $\eta =$
ind

inde tandem obtinemus hanc Seriem * $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ &c. pro longitudine Quadrantalis Arcus, cujus Chorda est Unitas: vel, quod perinde est, hanc $\frac{2}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$ &c. pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia æque simplices sunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æstimo. Illud enim melius quod utilius est, & Problema minori labore solvit. Sic, quamvis hæc æquatio $x^3 - x = 1$ appareat simplicior haece $yy - 2y\sqrt{\frac{31}{27} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$; tamen in confesso est posteriorem revera simpliciorem esse, propterea quod Radicem ejus y Geometra facilius eruit.

Et ob hanc rationem Series pro obtinendis Arcubus Circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis Sectoribus Conicarum Sectionum, pro optimis habeo quæ componuntur ex potestatibus Sinuum.

Nam siquis vellet per simplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. colligere longitudinem Quadrantis ad Viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5 000 000 000 terminis Seriei circiter; ad quorum Calculum Milleni Anni requirerentur. Et res tardius obtineretur per Tangentem 45 Graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 Graduum, Quinquaginta quinque vel Sexaginta termini hujus Seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \overline{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}}$ &c. sufficerent: quo-

* D. Vicecomes *Brounker* Hyperbolam per hanc Seriem $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 8} +$ &c. id est per hanc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} +$ &c. (conjunctis binis terminis) primus omnium quadravit. *Mercator* hanc Quadraturam aliter demonstravit. *Gregorius* communicavit hanc Seriem pro Circulo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. & *Newtonus* hanc $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} +$ &c.

rum

rum computatio Tribus, ut opinor, vel Quatuor Diebus abſolvi poſſet.

Et tamen hic non eſt optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam Series ex ſinu recto 30 graduum, vel ſinu verſo 60 graduum conflata, multo citius dabit Arcum ſuum; cujus ſextuplum vel duodecuplum eſt tota Peripheria. Neque majori labore eruitur area totius Circuli ex ſegmento cujus Sagitta eſt quadrans diametri. Ejus Computi ſpecimen, ſiquidem ad manus eſt, viſum fuit apponere; & una adjungere Aream Hyperbolæ quæ eodem calculo prodit.

Poſito Axe tranſverſo $= 1$, & ſinu verſo ſeu ſegmenti Sagitta $= x$; erit Semi-ſegmentum $\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}$ &c. Hæc autem Series ſic in infinitum producitur, ſit $2x$ $= a.$ $\frac{ax}{2} = b.$ $\frac{bx}{4} = c.$ $\frac{3cx}{6} = d.$ $\frac{5dx}{8} = e.$ $\frac{7cx}{10} = f$ &c. Et erit Semi-ſegmentum $\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} =$ $\frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ &c. Eorumque ſemi-ſumma $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$ &c. & ſemi-differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$ &c. His ita præparatis, ſuppono $x = \frac{1}{4}$, quadrantem nempe Axis; & prodit a $(=$ $= 0.25$; $b\left(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1 \times 8}\right) = 0.03125$: $c\left(= \frac{bx}{4} =\right.$ $\left.\frac{0.03125}{2 \times 8}\right) = 0.001953125$: $d\left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}\right.$ $= 0.000244140625$. Et ſic procedo uſque dum venero ad terminum depreſſiſſimum, qui poteſt ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c. reſpective diviſos diſpono in duas Tabulas: Ambiguos cum primo in unam; & Negativos in aliam; & Addo ut hic vides,

0.0833333333333333
6250000000000
271267361111
5135169396
144628917
4954581
190948
7963
352
16
1
0.0896109885646618

0.0002790178571429
34679066051
834465027
26285354
961296
38676
1663
75
4
0.0002825719389575

Tunc a priori summa aufero posteriorem, & restat 0.0893284166257043 Area Semi-segmenti Hyperbolici. Addo etiam eas summas, & aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666, & restat 0.0767731061630473 Area Semi-segmenti Circularis. Huic addo Triangulum istud quo completur in Sectorem, hoc est $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, seu 0.0541265877365274, & habeo Sectorem 60 graduum, 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482 est Area totius Circuli: Quæ divisa per $\frac{1}{4}$ sive quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuissem, potui per eundem numerum terminorum Seriei pervenisse ad multo plura loca figurarum, puta Viginti quinque aut amplius: Sed animus fuit hic ostendere, quid per simplex Seriei computum præstari posset. Quod sane haud difficile est, cum in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11, & nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

Per Seriem *Leibnitii* etiam, si ultimo loco dimidium termini adjiciatur, & alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras. Ut & ponendo summam terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$ &c.

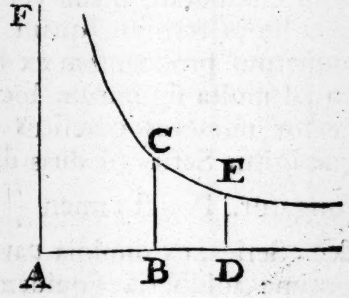
esse ad totam Seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse, quando vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus & citissime convergentibus Seriebus; vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, posita Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \frac{1}{9 \times 81}$ &c. quæ cito convergit. Vel, si conjunges cum aliis Seriebus, pone circuli Diametrum $= 1$, & $a = \frac{1}{2}$; & area totius circuli erit summa harum trium Serierum $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \frac{a^{11}}{11} +$ &c. $\frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11}$ &c. $\frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$ &c.

Hic consideravimus Series quatenus adhibentur ad computandum totum Circulum. Sed quando computandæ sunt partes ejus, tunc quælibet Series habet proprium usum, & in suo genere optima est. Si datur Tangens satis parva vel satis magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem ut inde computetur Arcus, neque vice versa. Series dato congruens est æquatio pro solvendo proprio Problemate.

N° LXI. Credo Cl. *Leibnitium*, dum posuit Seriem pro determinatione Co-sinus ex Arcu dato, vix animadvertisse Seriem meam pro determinatione Sinus Versi ex eodem Arcu; siquidem hæc idem sunt.

Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi literas pro quantitatibus cum Signis suis + & — affectis, dum dividit hanc Seriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2aab} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$ &c. Nam cum A-

re-



rea Hyperbolica BE, hic significata per z, sit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte Ordinatim applicatæ BC; si Area illa in numeris data sit l, & l substituatur in Serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c. vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c; prout l sit affirmativa vel negativa. Hoc est posito $a = 1 = b$, & l logarithmo Hyperbolico; numerus ei correspondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. si l sit affirmativus; & $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. si l sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum, quæ alias in nimiam molem crescerent. Nam v. g. illud unicum Theorema, quod supra posui pro Quadratura Curvarum, resolvendum esset in 32 Theoremata, si pro Signorum varietate multiplicaretur.

Præterea, quæ habet Vir Clarissimus de Inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum, ope Seriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} +$ &c. potius quam ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. nondum percipio. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad Seriem posteriorem quam ad priorem, posterior magis appropinquabit. Et certe minor est

labor computare unam vel duas primis figuras adjecti hujus termini, quam dividere Unitatem per numerum prodeuntem ex Logarithmo Hyperbolico ad multa figurarum loca extensum, ut inde habeatur numerus quæsitus Unitate major. Utraque igitur Series (si duas dicere fas sit) officio suo fungatur. Potest tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Series, ex dimidia parte terminorum constans, optime adhiberi; siquidem hæc dabit semi-differentiam duorum numerorum, ex qua & rectangulo dato uterque datur. Sic & ex Serie $1 + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. datur semi-summa numerorum, indeque etiam Numeri. Unde prodit relatio Serierum inter se, qua ex una data dabitur altera.

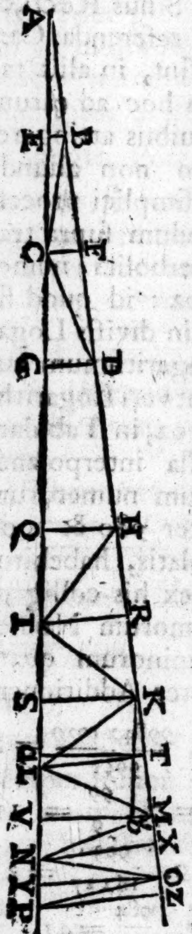
Theorema de inventione Arcus ex dato Co-sinu, ponendo Radium 1, Co-sinum c, & Arcum $\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso v, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194} +$ &c. Potest fieri ut $120-27v$ ad $120-17v$, ita Chorda ($\sqrt{2v}$) ad Arcum; & error erit tantum $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter; qui semper minor est quam $5\frac{1}{4}$ minuta secunda, dum arcus non sit major quam 45 grad. Et singulis etiam bisectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. applicari posset ad computationem tabulæ Segmentorum, ut observat Vir Clarissimus. Sed res optime absolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognita Quadrantis Area, per continuam Additionem nonæ partis ejus habebis Sectores ad singulos Decem Gradus in Semicirculo: deinde per continuam Additionem decimæ partis hujus, habebis Sectores ad Gradus; & sic ad decimas partes Graduum & ul-

ultra procedi poteſt. Tunc, radio exiſtente 1, ab unoquoque Sectore & ejus complemento ad 180 gradus, aufer dimidium communis Sinus Recti, & relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Cæterum quamvis Series hic non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem Logarithmorum non aliunde peti debere credetis forte, ex hoc ſimplici proceſſu qui ab iſtis pendet. Per methodum ſupra traditam quærantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod fit ſpatio unius & alterius horæ. Dein diviſis Logarithmis quatuor poſteriorum per Logarithmum numeri 10, & addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 89, 99, 100, 101, 102, in Tabulam referendi. Hi per dena intervalla interpolandi ſunt, & exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980 & 1020: & omnibus inter 980 & 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium Primorum Numerorum & eorum multiplicium, minorum quam 100: ad quod nihil requiritur præter Additionem & Subtractionem. Siquidem fit $\sqrt[10]{\frac{9984 \times 1020}{9945}} = 2$. $\sqrt[4]{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3$. $\frac{10}{2} = 5$. $\sqrt{\frac{98}{2}} = 7$. $\frac{99}{9} = 11$. $\frac{1001}{7 \times 11} = 13$. $\frac{102}{6} = 17$. $\frac{988}{4 \times 13} = 19$. $\frac{9936}{16 \times 27} = 23$. $\frac{986}{2 \times 17} = 29$. $\frac{992}{32} = 31$. $\frac{999}{27} = 37$. $\frac{984}{24} = 41$. $\frac{989}{23} = 43$. $\frac{987}{21} = 47$. $\frac{9911}{11 \times 17} = 53$. $\frac{9971}{13 \times 13} = 59$. $\frac{9882}{2 \times 81} = 61$. $\frac{9949}{3 \times 49} = 67$. $\frac{994}{14} = 71$. $\frac{9928}{8 \times 17} = 73$. $\frac{9954}{7 \times 18} = 79$. $\frac{996}{12} = 83$. $\frac{9968}{7 \times 16} = 98$. $\frac{9894}{6 \times 17} = 97$. Et habitis ſic Logarithmis omnium numerorum mino-

rum quam 100, restat tantum hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare.



Constructionis Tabulæ Sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum est continua Additio dati Anguli ad seipsum vel ad alium datum. Utpote in Angulo Addendo BAE; inscribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, &c. æquales radio AB: & ad opposita latera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c. differentiæ erunt Angulus A; Sinus HQ, IR, KS, &c; & Co-sinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & cæteri sic eruentur. Ad SV & MV demitte perpendicula T*a* & K*b*; & (propter similia Triangula ABE, TL*a*, KM*b*, ALT, AMV, &c.) erit AB . BE : : TL . L*a* $\left(= \frac{SL-LV}{2}\right)$: : KT $(=\frac{1}{2}KM)$. $\frac{1}{2}$M*b* $\left(= \frac{MV-KS}{2}\right)$ Et AB . AE : : KT . S*a* $\left(= \frac{SL+LV}{2}\right)$: : TL. Ta $\left(= \frac{KS+MV}{2}\right)$. Unde dantur Sinus & Cosinus KS, MV, SL, LV. Et simul patet ratio continuandi progressiones. Nempe AB . 2AE : : LV . TM+MX : : MX . VN+NY &c. : : MV . TL+XN : : XN . MV+OY &c. Vel AB . 2BE : : LV . XN—TL : : MV . TM—MX : : MX . OY —MV : : XN . VN—NY &c. Et retro AB . 2AE : : LS . KT+RK &c. Pone ergo AB = 1, &

& fac $BE \times TL = La$. $AE \times KT = Sa$. $Sa - La = LV$. $2AE \times LV - TM = MX$ &c Sed nodus est inventio Sinus & Co-sinus Anguli A. Et hic subveniunt Series nostræ. Utpote cognita ex superioribus Quadrantalis Arcus longitudine 1.57079 &c; & simul Quadrato ejus 2.4694 &c; divide Quadratum hoc per Quadratum numeri exprimentis rationem 90 Graduum ad Angulum A: &, Quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus Seriei $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} + \frac{z^4}{40320}$ &c. dabunt Co-sinum istius Anguli A. Sic primo quæri potest Angulus 5 Graduum, & inde Tabula computari ad Quinos Gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios gradus, per eandem Methodum. Nam non convenit progredi per nimios saltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ sic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel Subtractionem, more noto. Siquidem posito KT Co-sinu 60 Graduum; fit $AE = SV$, & $BE = Mb$. Tunc ad decimas & centesimas partes Graduum pergendum est per aliam Methodum; substitutis tamen prius Logarithmis Sinuum inventorum, si ejus generis Tabula desideretur.

Ad computum Tabularum Astronomicarum *Kepleri*; posui fundamentum aliquod in altera Epistola. Ejus Seriei tres primi termini & aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversæ ejusmodi Series aptari debent. Vel potius tales Series computandæ sunt, quæ ex data Area Sectoris Elliptici BGE, immediate exhibeant aream Sectoris Circuli, cujus Angulus est BEG, Radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, aut forte quatuor terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam solita Resolutio tot Triangulorum in aliis Hypothesibus: Imo forte minus grave, si Series prius debite concinnentur; siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos,

addendo ipſum & ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promptu habitos.

Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri poſſunt, ubi ratiocinia Geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut forte pauciores terminos Tabulæ in debitis diſtantiis; ſiquidem termini intermedii facile interſeruntur per Methodum quandam, quam in uſum Calculatorum fere hic deſcripſiſſem. Sed pergo ad alia.

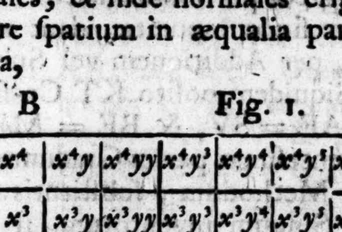
N° LXIII. Quæ Cl. *Leibnitius* a me deſiderat explicanda, ex parte ſupra deſcripſi. Quod vero attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, in Extractione Radicis Affectæ: primum p ſic eruo. Deſcripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata,

B Fig. 1.

x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2yy	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	$x\,y$	$x\,yy$	$x\,y^3$	$x\,y^4$	$x\,y^5$	$x\,y^6$
o	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6

A C

Fig. 2.



quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x & y, regulariter ascendentium a termino A; prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus Series conficienda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: & Regulâ ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicatâ (quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, & alia ad Regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant) Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6-5xy^5+\frac{x^3}{a}y^4-7a^2x^2y^2+6a^3x^3+b^2x^4=0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua ✱; ut vides Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3, $xxyy$ & y^6. E terminis itaque $y^6-7aaxxyy+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6-7vv+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

* Sic Æquatio $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3+aay+y^3=0$, & inde $y=a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæte-

* Hanc Resolutionem vid. pag. 79.

ris

ris omnibus in infinitum, & substituo $a + p =$ (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ sed ex iis, credo, D. *Leibnitius* se proprio man extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s, &c eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæ terisque eruuntur, quo primus p è prima, sed cur leviori; quia cæteri valores y solent prodire divi dendo terminum involventem infimam potestater indefinitæ quantitatis x per Coefficientem Radic p, q, r aut s.

N° LXIV. Intellexti credo ex superioribus, Regressioner ab Areis Curvarum ad Lineas Rectas, fieri p hanc Extractionem Radicis Affectæ. Sed duo a sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quib colligebam approximationes sub finem alterius E pistolæ, & intelligi potest per hoc Exemplum Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z =$ $+ \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Et partibus ej multiplicatis in se, emerget $z^2 = x^{u} + x^3 + \frac{11}{12}x^4$ $\frac{5}{6}x^5$ &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$ & $z^5 = x^5$ &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}z^2$, & restat $z - \frac{1}{2}z$ $= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$ &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ &c. Aufer $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}$ &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4$ $\frac{1}{120}z^5 = x$ quamproxime; sive $x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}$ $- \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.

Eodem modo Series de una Indefinita Quant tate in aliam transferri possunt. Quemadmodum posito r Radio Circuli, x Sinu recto arcus z, & $+ \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ &c. Longitudine arcus istius; atq hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem velle transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-}}$ & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8x4}$ & vocetur hæc quantitas t, Colligo potestates ejus t^3 x^3

$+\frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5 = x^5 +$ &c. Aufero autem t de z, (ponendo 1 pro r) reſtat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10}$ c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Au- ro $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quampro- me. Quare eſt $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Sed uis in uſus Trigonometricos me juſſiſſet exhibe- expreſſionem Arcus per Tangentem; eam non c circuitu, ſed directa methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Se- s ex duabus vel pluribus indefinitis quantitati- s conſtantes; & Radices affectarum Æquatio- m magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc po- iorem uſum adhibeo potius Methodum in alte- Epiſtola deſcriptam tanquam generaliorem, & egulis pro Eliſione ſuperfluorum terminorum ha- tis) paulo magis expeditam.

Pro Regreſſione vero ab Areis ad Lineas Rectas, ſimilibus, poſſunt hujuſmodi Theoremata adhi- ri.

Theorema 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{\ldots bc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3aacc - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 +$ c. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad eam Hyperbolæ, $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. t ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y = z$ $\frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

Theorema 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{\ldots bc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}}z^9$ &c.

&c. Exempli gratia. Proponatur Æquatio Arcum Circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ & Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z}{12}$ $- \frac{z^7}{5040r^6} +$ &c.

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Li as rectas celare ſtatui.

Ubi dixi, omnia pene Problemata ſolubilia e ſtere; volui de iis præſertim intelligi circa q Mathematici ſe hactenus occuparunt, vel ſalt in quibus Ratiocinia Mathematica locum aliqu obtinere poſſunt. Nam alia ſane adeo perple conditionibus implicata excogitare liceat, ut n ſatis comprehendere valeamus; & multo mi tantarum computationum onus ſuſtinere quod i requiretur.

Attamen, ne nimium dixiſſe videar, inverſa Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliaq illis difficiliora. Ad quæ ſolvenda uſus ſum d plici Methodo; una concinniori, altera generali ri. Utramque viſum eſt impræſentia literis tra poſitis conſignare, ne propter alios idem obtin tes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer. *

*ccdæ*10*effh*12*i*4*l*3*m*10*n*6*oqqr*7*s*11*t*10*v*3
11*ab*3*cdd*10*eæg*10*ill*4*m*7*n*6*o*3*p*3*q*6*r*5*ſ*1
7 *vx*, 3*acæ*4*egh*6*i*4*l*4*m*5*n*8*oq*4*r*3*ſ*6*t*4
aaddæeeeeeiiimmnnooprrrsssssttuu.

* Id eſt. *Una Methodus conſiſtit in extractione fluentis quanti ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in ſumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera mode derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æq tionis reſultantis, ad eruendos terminos aſſumptæ Seriei.* Analyſin verſam per Fluentes & earum Momenta in æquationibus tam inf tis quam finitis, *Newtonus* in his Epiſtolis ad Regulas quatuor re

Inverſum hoc Problema de Tangentibus, quan- Tangens inter punctum contactus & axem Fi- ræ eſt datæ longitudinis, non indiget his Me- odis. Eſt tamen Curva illa Mechanica, cujus terminatio pendet ab Area Hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam Problema, quando rs Axis inter Tangentem & Ordinatim-applica- m datur longitudine.

Sed hos caſus vix numeraverim inter ludos na- ræ. Nam quando in Triangulo Rectangulo, od ab illa Axis parte & Tangente ac Ordina- m-applicata conſtituitur, relatio duorum quorum- et laterum per Æquationem quamlibet defini- r, Problema ſolvi poteſt abſque mea Methodo enerali: Sed ubi pars Axis ad punctum aliquod ſitione datum terminata ingreditur Vinculum; nc res aliter ſe habere ſolet.

Communicatio Reſolutionis Affectarum Æqua- onum per Methodum *Leibnitii*, pergrata erit; xta & explicatio quomodo ſe gerat, ubi indices teſtatum ſunt Fractiones; ut in hac Æquatione $+ x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{2}{5}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$; aut Surdæ ‡ Quantitates, in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$: ubi $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$ non ſignant Coefficientes ipſius x, ſed indices Pote- tum ſeu Dignitatum ejus; & $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ indicem Dig- tatis Binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea me- odo patet; aliter deſcripſiſſem.

. Per primam extrahitur Fluens ex Binomiis, adeoque ex æqua- nibus quibuſcunque non affectis in Serie infinita, & Momentum entis ſimul prodit, quo evaneſcente Series in Æquationem finitam dit. Per ſecundam extrahitur Fluens ex æquationibus affectis Flu- nem non involventibus. Per tertiam extrahitur Fluens ex æqua- nibus affectis Fluxionem ſimul involventibus. Per quartam eruitur ens ex conditionibus Problematis. Regulæ duæ primæ in princi- Epiſtolæ ſuperioris duæ ultimæ in fine hujus ponuntur. Harum gularum *Newtonum* eſſe inventorem primum nemo dubitat.

‡ Surdos indices D. *Leibnitius* in Epiſtola ſequente mutavit in entes, & inde natus eſt calculus exponentialis.

Sed

Sed meta tandem prolixæ huic Epistolæ pone-
da est. Literæ sane Excellentissimi *Leibnitii* val-
dignæ erant, quibus fusius hoc Responsum d-
rem. Et volui hac vice copiosior esse, quia credi-
amœniora tua negotia severiori hoc scribendi gen-
re non debere a me crebro interpellari.

Tui Studiosissimus

Is. Newto-

Nº LXV.

Excerpta ex Epistola D. Collins *ad D.* Newtonu-
Londini 5 Martii 1677 *data. Integra autem-
tat impressa in Tomo tertio Operum D.* Walli-
pag. 646, *&c.*

Clarissime Vir,

ADerat hic D. *Leibnitius* per unam Septimana-
in mense *Octobris*; in reditu suo ad Duce-
Hanoveræ; cujus literis revocatus erat, in ordi-
ad quandam Promotionem.

Dixit *Leibnitius*, se posse & velle consilia i-
pertire, pro obtinendis Seriebus, absque Speci-
Extractione Radicum Æquationum affectarum-
modo quis velit laborem illum obire.

Et consequenter ad hoc, (postquam ego D. *B-
kerum* ipsi nominaveram,) literis ejus ad D. *Olde-
burgium*, datis *Amstelodami*, $\frac{18}{28}$ *Novemb.* 1676, h-
scribit.

'D. *Collinio* hæc quæso communica. Dixit il-
'mihi D. *Bakerum*, doctum admodum & indust-
'um apud vos Analyticum, utilibus consiliis ex-
'quendis parem esse. Elegi ego unum præ reliqu-
'utile & facile. Nimirum, Methodus Tange-
'tium a *Slusio* publicata nondum rei fastigiu-
'tenet. Potest aliquid amplius præstari in eo g-
'nere, quod maximi foret usus ad omnis gener-
'Problemata: Etiam ad meam (sine extractionibu-
'Æquationum ad Series reductionem. Nimiru-

'Poss-

Posset brevis quædam calculari circa Tangentes Tabula, eousque continuanda, donec progressio Tabulæ apparet; ut eam scilicet quisque, quousque libuerit, sine calculo continuare possit.

'*Amstelodami* cum *Huddenio* locutus sum; cui negotia civilia tempus omne eripiunt. Est enim ex numero 12 urbis Consulum, qui subinde imperium obtinent: Nuper Consul Regens erat; nunc Thesaurarii munus exercet. Præclara admodum in ejus Schedis superesse certum est. Methodus Tangentium a *Slusio* publicata dudum illi fuit nota. Amplior ejus Methodus est, quam quæ a *Slusio* fuit publicata. Sed & Quadratura Hyperbolæ *Mercatoris* ipsi jam Anno 1662 innotuit. Hactenus *Leibnitius*.

P. S. Exemplar Epistolæ tuæ (quatuor schedarum) nondum est ad D. *Leibnitium* missum: Sed, intra Septimanam, est quidam hinc profecturus *Hanoveram*, qui tum illud, tum libros quosdam laturus est.

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgium, 21 Junii 1677, *data cum D.* Newtono *communicanda. Cujus extat & autographum & exemplar manu D.* Collins *descriptum.* Nº LXVI.

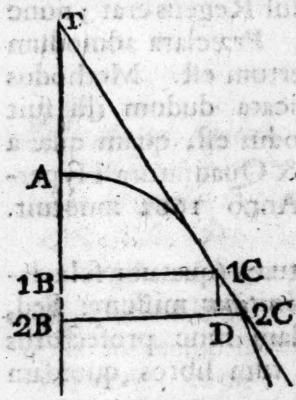
Amplissime Domine,

ACcepi Literas tuas diu expectatas, cum inclusis *Newtonianis* sane pulcherrimis; quas plus semel legam cum cura & meditatione; quibus certe non minus dignæ sunt quam indigent. Nunc pauca quæ festinante oculo obeunti incidêre e vestigio annotabo.

Egregie placet, quod descripsit qua via in nonnulla sua elegantia sane Theoremata inciderit. Et quæ de *Wallisianis* Interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum Inter-

terpolationum Demonstratio, cum res ea ante (quod sciam) sola Inductione niteretur; tamets pars eorum per Tangentes sit demonstrata.

Clarissimi *Slusii* Methodum Tangentium non dum esse absolutam Celeberrimo *Newtono* assentior Et jam a multo tempore * rem Tangentium lon ge generalius tractavi; scilicet per differentias Or dinatarum. Nempe T 1B (intervallum Tangentis a Ordinata in Axe sumptum est ad 1B 1C Ordinatam, u 1CD (differentia duarum Abscissarum A 1B, A 2B, ad D 2C (differentiam dua rum Ordinatarum 1B 1C 2B 2C.) Nec refert quem angulum faciunt Ordinata ad Axem. Unde patet, ni hil aliud esse invenire Tan gentes, quam invenire Dif ferentias Ordinatarum, positis differentiis Absci ssarum (seu 1B 2B = 1CD) si placet æqualibus Hinc nominando ‡ in posterum, dy differentiam duarum proximarum y (nempe A 1B & A 2B;) & dx seu D 2C differentiam duarum proximarum (prioris 1B 1C, posterioris 2B 2C;) patet dy^2 esse $2ydy$; & dy^3 esse $3y^2dy$, &c. & ita porro. Nam sint duæ proximæ sibi (id est, differentiam haben tes infinite parvam) scilicet A 1B $= y$; & A 2B $=$ $y + dy$. Quoniam ponimus dy^2 esse differentiam quadratorum ab his duabus rectis, Æquatio eri



* Idem fecit D. *Barrow* in ejus Lect. 10, Anno 1669 impressi i dque calculo consimili.

‡ Cœpit igitur D. *Leibnitius* hoc ipso tempore Methodum diffe rentialem cum amicis scripto communicare; lectis prius quæ *New tonus* de hac Methodo in duabus Epistolis scripserat: Lectis forte & aliis *Newtonianis* sub finem Anni 1676, ubi domum per *Londinum* redibat; quo tempore Prælectiones *Barrovii* secum tulit.

dy

$dy^2 = y^2 + 2ydy + dydy - y^2$. Seu omissis $y^2 - y^2$ quæ se destruunt, item omisso quadrato quantitatis infinite parvæ (ob rationes ex Methodo de Maximis & Minimis notas,) erit $dy^2 = 2ydy$. *Idemque est de cæteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiæ quantitatum ex diversis indefinitis in se invicem ductis factarum: ut dyx erit $= ydx + xdy$; & $dy^2x = 2xydy + y^2dx$. Hinc si æquatio $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$ &c. $= 0$; statim habetur Tangens Curvæ ad quam est ista Æquatio. Nam ponendo $AB = y$, & $A2B = y + dy$ (scilicet, quia $1B\ 2B$ seu $1CD = dy$,) Itemque ponendo $1B\ 1C = x$, & $2B\ 2C = x + dx$ (scilicet quia $2CD = dx$,) Et quia eadem æquatio exprimit quoque relationem inter $A2B$ & $2B\ 2C$, quæ eam exprimebat inter $A1B$ & $1B\ 1C$; ‡Tunc in æquatione illa pro y & x substituendo $y + dy$, & $x + dx$, fiet

$$\left.\begin{array}{l} + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ \&c.} \\ \hline bdy + cdx + dydx + 2eydy + 2fxdx + 2gxydy + 2hxydx \text{ \&c.} \\ \qquad + dxdy \qquad\qquad + gy^2dx + hx^2dy \text{ \&c.} \\ \hline \qquad + ddxdy + edydy + fdxdx + gxdydy + hydxdx \\ d \text{ est quantitas communi more.} \qquad + 2gydydx + 2hxdxdy \text{ \&c.} \\ \mathrm{d} \text{ est nota Differentiæ.} \qquad + gdxdydy + hdydxdx \end{array}\right\} = 0.$$

Ubi, abjectis illis quæ sunt supra primam lineam, quippe nihilo æqualibus per æquationem præcedentem; & abjectis illis quæ sunt infra secundam, quia in illis duæ infinite parvæ in se invicem ducuntur; hinc restahit tantum æbuatio hæc $bdy + cdx + dydx + dxdy$

* Id est, Si secundus terminus Binomii sit differentia primi termini, secundus terminus potentiæ Binomii erit differentia potentiæ. Hoc est fundamentum Methodi differentialis a *Leibnitio* jam positum. Et hoc idem fundamentum Methodi suæ *Newtonus* Anno 1669 posuerat in Analysi supra impressa, pag. 91. Persimilibus calculis *Newtonus* Momenta, & *Leibnitius* Differentias collegerunt, & discrepant solum in rerum nominibus.

‡ Calculus etiam in his Exemplis allatus a calculo *Newtoniano* in illis notarum formulis differt, sed notis minus aptis obscurior redditur.

&c. = o, quicquid ſcilicet reperitur inter lineam primam & ſecundam. Et, mutata æquatione in rationem ſeu analogiam, fiet $-\frac{dy}{dx} =$ $\frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ \&c.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ \&c.}}$. Id eſt (quia $-\frac{dy}{dx}$ ſeu $\frac{-1B\,2B, \text{ ſeu } -1CD}{D\,2C} = -\frac{T1B}{1B\,2C}$) erit $\frac{c + dy \text{ \&c.}}{b + dx \text{ \&c.}} = -\frac{T\,1B}{1B\,1C}$. Quod coincidit cum Regula *Sluſiana*, oſtenditque eam ſtatim occurrere hanc Methodum intelligenti.

Sed Methodus ipſa (priore) noſtra longe eſt amplior. Non tantum enim exhiberi poteſt, cum plures ſunt literæ indeterminatæ quam *y* & *x* (quod ſæpe fit maximo cum fructu;) Sed & tunc utilis eſt cum interveniunt irrationales, quippe quæ eam nullo morantur modo, neque ullo modo neceſſe eſt irrationales tolli, quod in Methodo *Sluſii* neceſſe eſt, & calculi difficultatem in immenſum auget.

Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitatibus ſimplicioribus rem explanare. Et primum ſit in ſimpliciſſimis generaliter. Si ſit aliqua potentia aut radix x^z; erit $dx^z = zx^{z-1}dx$.

Si z ſit $\frac{1}{2}$, ſeu ſi x^z ſit $\sqrt{x}$, erit dx^z, ſeu hoc loco $d\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ ſeu $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; ut notum aut facile demonſtrabile.

Sit jam Binomium, ut $\sqrt{}^3 : \overline{a + by + cy^2 \text{ \&c.}}$ quæritur $d\sqrt{}^3 : \overline{a + by + cy^2 \text{ \&c.}}$ ſeu dx^z, poſito $\frac{1}{3} = z$, & $a + by + cy^2$ &c. $= x$. Eſt autem $dx = bdy + 2cydy$ &c. Ergo dx^z ſeu $\frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{bdy + 2cydy \text{ \&c.}}{3 \times \overline{a + by + cy^2 \text{ \&c.}}|^{\frac{2}{3}}}$

Eadem Methodus adhiberi poteſt etſi Radices in Radicibus implicentur. Hinc ſi detur æquatio valde intricata, ut $a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt{}^3 : \overline{1 + y + \ldots}}$ $hx^2y\sqrt{y^2 + y\sqrt{1 - y}} = o$. ad aliquam Curvam cujus

jus Abſciſſa ſit y (AB,) Ordinata x (BC,) tunc Æquatio proveniens utilis ad inveniendam Tangentem TC, ſtatim ſine calculo ſcribi poterit; & erit hæc

$$bdx\sqrt{y^2+b\sqrt[3]{1+y}} + \frac{bx}{2\sqrt{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}} \times \overline{2ydy + \frac{bdy}{3\times\overline{1+y}|^{\frac{2}{3}}}} + \overline{bx^2dy+2bxydx} \times \sqrt{y^2+y\sqrt{1-y}} + \frac{byx^2}{2\sqrt{y^2+y\sqrt{1-y}}} \times \overline{2ydy+dy\sqrt{1-y}-\frac{ydy}{2\sqrt{1-y}}} = 0.$$

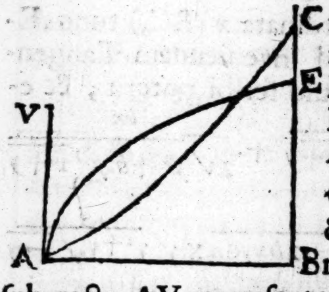
Seu, mutando Quotientem hanc inventam in Analogiam, erit $-dy$ ad dx, ſeu T 1B ad 1B 1C, ut omnes provenientis æquationis termini per dx multiplicati, ad omnes ejuſdem terminos per dy multiplicatos.

Ubi ſane mirum & maxime commodum evenit, quod dy & dx ſemper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem *Sluſiana* omnes ordine irrationales tollendas eſſe nemo non videt.

Arbitror, quæ celare voluit *Newtonus* de Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento * quadraturas quoque reddi faciliores, me in ſententia hac confirmat, nimirum ſemper figuræ illæ ſunt quadrabiles quæ ſunt ad Æquationem Differentialem. Æquationem Differentialem voco talem qua valor ipſius dx exprimitur, quæque ex alia derivata eſt qua valor ipſius x exprimebatur. Exempli gratia; ſit AB $= y$. EB $= x$ ponatur $\frac{b+cy+dy^2+ey^3 \text{ \&c.}}{2\sqrt{1+by+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{3}dy^3+\frac{1}{4}ey^4 \text{ \&c.}}}$ Quæritur Quadratura figuræ ABEA (quanquam

* Characteres Methodi *Newtoni Leibnitius* hic enumerat, & gaudet ſe in Methodum incidiſſe cui Characteres hi omnes competunt. Fatetur etiam *Newtonum* intellexiſſe facilem quadraturam Figurarum quæ ſunt ad Æquationem Differentialem. Vel doceat Methodum aliam in rerum natura extare cui Characteres hi omnes competunt, vel deſinat negare ſe in Methodum *Newtoni* incidiſſe.

O 2 forte



forte sæpe tale Trilineum non sit proditurum quale hoc schemate depinximus.) Describatur alia Curva AC, talis ut BC [quæ] sit $\sqrt{1+by+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{3}dy^3+\frac{1}{4}ey^4}$ &c. [ipsius Ordinatam] significet; & Rectangulum sub recta AV repræsentante Unitatem constructionis, & sub Ordinata nova BC, æquabitur figuræ ABEA. Ejusmodi Theoremata condi possunt infinita: Imo pleraque sub generalissimis quibusdam complecti. Licet nihil refert sive Series hæ producantur, sive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam Regulam pro infinitis figuris quadrandis inservire, diversæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari solebant.

Pulcherrimæ sunt illæ Series *Newtonianæ* quæ ex Infinitis in Finitas degenerant; qualis illa est quam exhibet pro Extractione Radicum Binomii, aut ejus Quadratura. Quod si in ipsius generali illa Æquationis Affectæ indefinitæ Extractione, cum sit $x = ay + by^2 + cy^3$ &c. & y sit $\frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3}$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4}$ &c: idem præstari posset; ut scilicet, inter extrahendum radices ex æquationibus aut binomiis, invenire liceret Radices rationales finitas quando eæ insunt, vel etiam irrationales: Tunc dicerem Methodum Serierum infinitarum ad summam perfectionem esse perductam.

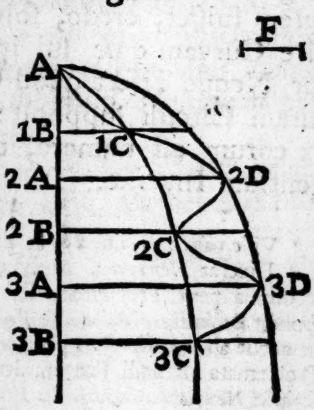
Opus esset tamen præterea, discerni posse varias æquationis ejusmodi Radices: Item necesse esset, ope Serierum, discerni æquationes Possibiles ab Impossibilibus. Quod si hæc nobis obtinuerit Vir in his studiis maximus, atque effecerit scilicet ut possimus Seriem Infinitam convertere in Finitam quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex

qua-

quanam finita ſit deducta: Tunc in methodo Serierum Infinitarum, quæ Diviſione & Extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum reſtabit. Hæc, ſi quiſquam mortalium, certe *Newtonus* præſtare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut, ex multis Seriebus Infinitis, poſſimus deligere maxime naturales; quales haud dubie illæ erunt, quæ ita erunt comparatæ, ut, cum fieri poteſt, atque opus eſt, degenerent in Finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum Extractionum per Series Infinitas minime Indirectam, ſed maxime Naturalem eſſe.

Problema eſt perelegans cujus meminit, Curvam deſcribere quæ per data quæcunque tranſeat Puncta. *Huddenius* mihi *Amſtelodami* dixit, poſſe ſe Curvam deſcribere Analyticam, ſeu certa Æquatione uniformi conſtantem, quæ Faciei Hominis cujuſdam noti lineamenta deſignet.

Cæterum quærendum eſt, an hoc *Newtonus* intelligat de Punctis Infinitis; ut ſi ſit Axis A 1B 2A 2B 3A &c. in infinitum productus; & duæ curvæ datæ infinitæ Analyticæ, una A 1C 2C 3C &c, altera A 2D 3D &c; ſi ponamus A 1B, 1B 2A, 2A 2B, 2B 3A, &c, inter ſe & datæ cuidam quantitati F æquales; Quæritur an dari poſſit Curva Analytica, ſeu Æquationis capax, quæ in infinitum producta tranſeat (alternis) per puncta 1C, 2D, 2C, 3D, 3C, &c. *Fermatius* alicubi ſcribit, ſe Methodum habere per quam Curva inveniri poſſit, cujus proprietas ſpecifica data non pertineat ad unum Punctum, ut vulgo fit, cum Ordinatæ referuntur ad partes A-



 xis;

xis; ſed ad duo quælibet ſimul, vel etiam ad tria quælibet ſimul, &c.

* Quæ de variis Seriebus ſuis & noſtris examinandis atque inter ſe comparandis dicit Clariſſimus *Newtonus*; in ea me immergere non audeo, antequam in gratiam cum Analyſi rediero: nam harum rerum veſtigia in animo meo prope non obliterata ſunt. Agnoſco interim pulcherrima & utiliſſima ab eo annotari. Elegantiſſima & minime expectata eſt via qua ſeriem meam $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ &c. deduxit ex ſua.

Quod ait, Problemata methodi Tangentium Inverſæ, eſſe in poteſtate; hoc arbitror ab eo intelligi per Series ſcilicet Infinitas: ‡ Sed a me ita deſiderantur, ut Curvæ exhibeantur Geometrice quatenus id fieri poteſt, ſuppoſitis (minimum) Quadraturis. Exempli cauſa. Cycloidem deprehendit *Hugenius* ſui ipſius Evolutione deſcribi: Difficile autem fuiſſet, credo, ſolvere hoc Problema, Invenire Curvam quæ ſui ipſius Evolutione deſcribitur. Neque refert quod Curvæ Deſcriptio quadraturam Circuli ſupponit: Et hoc Problema etiam ex eorum eſt numero, quæ voco Methodi Tangentium Inverſæ. Ita inter Methodos Tangenti-

* Vide pag. 121, lin. 25, & pag. 126, lin. 13 & ſeq.

‡ Dixerat *Newtonus*, Analyſin beneficio æquationum infinitarum ad omnia pene Problemata ſeſe extendere (pag. 141, lin. 10.) Reſpondit *Leibnitius*; Multa eſſe *Problemata* uſque adeo mira & implexa ut neque ab æquationibus pendeant neque a quadraturis, qualia ſunt Problemata Methodi Tangentium inverſæ &c, pag. 155, 156. Reſcripſit *Newtonus*, *inverſa de Tangentibus Problemata eſſe in poteſtate, aliaque illis difficiliora*; *ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe duplici Methodo* &c. pag. 188. *Leibnitius* vero ne quid a *Newtono* jam didiciſſe videretur, regerit ſolutionem a *Newtono intelligi per Series infinitas*; *ſed a ſe ita deſiderari ut Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri poteſt*. In priore Epiſtola negaverat Analyſin *Newtonianam* per Æquationes Infinitas ad hæc Problemata extendi. Jam negat ſe negaſſe, & verbis prioribus nubem obducit, quaſi inverſum illud Problema ſuo ſenſu non ſolveretur, niſi Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri poteſt, & Curva quæ ſui ipſius Evolutione deſcribitur, inveniri poſſit per eandem ſolutionem.

um

um Inverſas generales eſt, Invenire Curvam Analyticam cujus Longitudines ſint Areis datæ Figuræ, Curvâ Analytica comprehenſæ, proportionales. Contrarium enim dudum poſſumus. Quod Problema arbitror non eſſe Inſolubile, & videtur non contemnendum: Facilius enim eſt Lineam quam Spatium organice metiri. Et, reducta Spatiorum dimenſione ad dimenſionem Linearum, ſolis Filis in rectum extenſis Mechanica fieri poterit Conſtructio; & Spatia poterunt in data ratione ſecari inſtar Linearum rectarum.

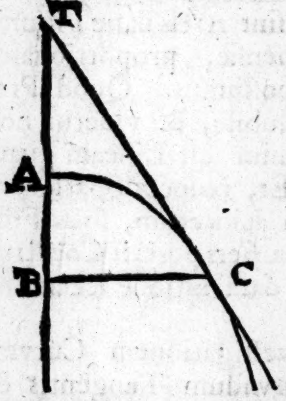
Cum ait *Newtonus*, inveſtigationem Curvæ, N°LXVIII quando Tangens, vel Intervallum Tangentis & Ordinatæ in Axe ſumptum, eſt recta conſtans, non indigere his Methodis: innuit credo ſe intelligere Methodum Tangentium Inverſam generalem in poteſtate eſſe per Methodos Serierum appropinquativas; in hoc vero caſu ſpeciali * non opus eſſe Seriebus. Ego vero Methodum quærebam quæ accurate Curvam quæſitam exhibeat, ſaltem ex ſuppoſitis Quadraturis; & cujus ope ejus Æquationem, ſi quam habet, aut aliam primariam proprietatem poſſumus invenire.

Quod ait, Problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli TBC ſemper poſſe ſolvi: Id verum eſt; at ex ‡ meis quoque artibus flu-

O 4

* Hoc non dixit *Newtonus*, ſed perſpicue dixit Problema in hoc caſu non indigere Methodis duabus generalibus, quas literis tranſpoſitis celaverat. vide pag. 189.

‡ Per artes ſuas intelligit Methodum differentialem, ut patet ex calculis quos ſubjungit. Ubi Epiſtolam priorem ſcribebat, Problema de Curva invenienda, in qua intervallum Tangentis & Ordinatæ in Axe ſumptum ſit recta conſtans, vocabat Ludum naturæ, & ejuſmodi Problemata mira & implexa ab æquationibus pendere noluit. Reſpondebat *Newtonus* hoc Problema non eſſe ludum naturæ, ſed ubi datur relatio quævis inter ordinatam, & tangentem, & intervallum utriuſque in Axe ſumptum, ſemper poſſe ſolvi, idque abſque ſua Methodo generali; nempe per Fluxionum methodum ſimplicem & Quadraturam Curvarum. Jam reſcribit *Leibnitius, Id verum eſſe, at ex ejus quoque artibus fluere*, (id eſt ejuſmodi Problemata ab æquationibus



fluit; ac ſæpe, ne Quadraturis quidem accitis, ſimplici Analytica Æquatione præſtari poteſt. Ut, ſi BC poſita x, ſit TB $= bx + cx^2 + dx^3$, quæritur Qualiſnam ſit hæc Curva quæ hanc Tangentium habeat proprietatem: id eſt, Quænam ſit Æquatio relationem exprimens inter AB ſeu y, & BC ſeu x. Aio eam fore $y = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$. Si fuiſſet TB $= a + bx + cx^2$, opus fuiſſet Quadratura Hyperbolæ ad inveniendam Curvam quæſitam. Generaliter autem quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus Trianguli, (quod ego *Characteriſticum*, ob crebros uſus, vocare ſoleo) ſemper, ſuppoſitis Quadraturis Figurarum Analyticarum, haberi poteſt Curva quæſita. Quod tamen neſcio an præter *Newtonum* præſtiturus ſit quiſquam.

Mea Methodo, res unius lineolæ calculo peragitur ac demonſtratur. Sed & rem infinitis caſibus præſtare poſſum, tametſi ipſa y ſeu AB ingrediatur in ipſius TB expreſſionem. Ut, ſi ſit TB $= bx + cx^2 + dx^3 + y$, fiet Æquatio Curvæ $yx = bx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{3}dx^2$. [*Forte legendum*, TB $= b + cx + dx^2 - y$, *fiet æquatio Curvæ*, $yx = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$.] Itaque ſi habeatur valor ipſius TA, ex BC haberi poterit Curva.

Quod vero ait Cl. *Newtonus* *non æque rem procedere ſi detur relatio ipſius TB ad partem axis,

bus ſuis pendere) & triangulum TBC, *ob crebros uſus, Characteriſticum vocat,* quaſi hæc ipſi dudum innotuiſſent. Hujuſmodi problemata ab æquationibus non pendere anno ſuperiore ſcripſit: jam fluunt horum ſolutiones ex ejus artibus, ac ſæpe ne quadraturis quidem accitis; ſimplici analytica æquatione (differentiali ſcilicet) peraguntur.

Quod

ſeu ad AB vel y, ad hoc reſpondeo; mihi æque facile eſſe invenire Curvæ naturam vel æquationem, ſi detur relatio ipſius TB ad AB, quam ſi, ut ipſe requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero methodum Tangentium inverſam nondum quod ſciam habemus.

Sunt & alia Problematum genera quæ hactenus in poteſtate non habeo, quorum ecce exempla. Sint duæ æquationes $x^y + y^x = xy$, & $x^x - y^y = x$ Nº LXIX.
$+ y$. Duæ ſunt incognitæ x, y, duæque ad eas inveniendas æquationes; quæritur valor tam unius quam alterius literæ. Talia Problemata vel in numeris vel in lineis ſolvere difficillimum arbitror; ſi tamen de appropinquationibus agatur, puto poſſe iis ſatisfieri. Si quam huic difficultati Lucem afferre poteſt *Newtonus*, pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analyſim promovebit.

Analyſis quoque *Diophantæa*, ſeu ſolutio Problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta eſt.

Hæc annotavi feſtinans atque inter legendum; ad reliqua majore otio opus eſt: Interea celeberrimum *Newtonum* quæſo officioſiſſime a me ſaluta, & poſt actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum Serierum; nempe poſita $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. ait fore $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ &c. Et ſi qua alia in promptu habet Theoremata *nonnihil generalia; quoniam ad calculum contrahendum plurimum ſerviunt: quod ſi eorum origi-

* Dixerat *Newtonus* quod ubi *relatio duorum quorumlibet laterum Trianguli definiretur per æquationem, Problema ſolvi poteſt abſque generali ejus Methodo quam literis tranſpoſitis celaverat, ſed ubi pars Axis vel Abſciſſa ingreditur vinculum res aliter ſe habere ſolet*, id eſt, indiget ejus Methodo generali, præterquam in particularibus quibuſdam. *Leibnitius* ad particularia illa alludens *ſibi æque facile eſſe ais invenire Curvæ naturam vel æquationem in utroque caſu* Quibus verbis manifeſtum eſt ſolutionem generalem ei nondum innotuiſſe.

nem

nem ſive demonſtrationem addet, tanto magis o-bligabit. Velim etiam noſſe an per Extractiones in Seriebus diſcernere poſſit æquationes poſſibiles ab impoſſibilibus. Nam ſi generalis ejuſmodi extracti procederet, ſequeretur nullam æquationem fore im-poſſibilem: item quomodo inveniat diverſas ejuſmodi æquationis radices, ita ut ex pluribus radicibus eam poſſit invenire quam quærimus: item an tales ha-beat Series quarum ope extrahendo æquationis in-veniuntur valores finiti, quando tales inſunt æqua-tione: denique quid ſentiat de reſolutione æqua-tionum quales paulo ante poſui, ut $x^y + y^x = x$ & $x^x + y^y = x + y$; ubi ſcilicet incognita ingreditu in exponentem.

Oblitus eram dicere pulchram mihi videri Ciſ-ſoidis extenſionem in rectam, quam *Newtonus* in-venit, ex ſuppoſita Quadratura Hyperbolæ. Eg mihi videor eodem modo etiam metiri poſſe curvam Hyperbolæ æquilateræ, ſed nondum omnis; nequ curvam Ellipſeos quantum memini.

Antequam finiam adjiciam uſum pulcherrimu Serierum, qui imprimis *Collinio* noſtro non erit in-gratus. Scis magnam eſſe difficultatem circa extr hendas radices ex binomiis Cubicis, quando eas in-greditur quantitas imaginaria, orta ex radice qu dratica negativæ quantitatis; ut $\sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-b}}$ $= M + \sqrt{3}: \overline{a - \sqrt{-bb}} = N$: ubi utraque quan-titas M & N eſt ſingulatim impoſſibilis, ſumma au-tem, ut alibi oſtendi, *eſt quantitas poſſibilis & reali æqualis cuidam quæſitæ z. Ut vero ea eximatu & ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{1}{2}z +$ $e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}}$, & $\frac{1}{2}z - e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}:$ $\overline{a - \sqrt{-bb}}$ (unde fit $\sqrt{3}: \overline{a + \sqrt{-bb}} + \sqrt{3}:$ $\overline{a - \sqrt{-bb}} = z$) non poteſt adhiberi Methodu *Schotenii* Geometriæ *Carteſianæ* ſubjecta, quia op

* Summa eſt quantitas triplex poſſibilis, ideoque non niſi triplicit exhiberi poteſt.

e

t ad eam ut valor ipsius $\sqrt{}^{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$ exhiatur saltem approximando, quod notis Methodis npossibile est. Quis enim valorem ipsius $\sqrt{-bb}$ rope verum dabit? necesse est enim invenire $\sqrt{-1}$; quis autem exprimat $\sqrt{-1}$ appropinuando? Scripsi olim *Collinio* me remedium invenisse, quod etiam ad omnes gradus superiores vaat: id ecce hic uno verbo. Ex Binomio $\sqrt{}^{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$ extraho radicem per Seriem Infinitam, ve per Theorema *Newtonianum*, sive etiam more eo priore, instituendo calculum secundum natum cujusque gradus, cum scilicet nondum Theema generale abstraxissem: quæ radix ponatur se $l+m\sqrt{-bb}+n+p\sqrt{-bb}$ &c. Extrahatur m & radix ex Binomio altero $\sqrt{}^{3}:\overline{a-\sqrt{-bb}}$, et illa $+l-m\sqrt{-bb}+n-p\sqrt{-bb}$ &c. ut cile demonstrari potest ex calculo: ergo * addendo hæc duo extracta, destruentur imaginariæ uantitates, & fiet $z=2l+2n$ &c. quæ sunt eæ eriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaa. Invento ergo valore ipsius z quantum satis est ropinquo, quemadmodum *Schotenius* postulat, requa methodo *Schoteniana*, perinde ac in illis Binomiorum extrahendorum generibus, transigentur.

Junii 21. 1677.

* Examinanda est hæc Methodus.

pistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 12 Julii 1677 *data, cum D.* Newtono *communicanda. Hujus extat exemplar manu D.* Collins *descriptum, & impressa est a D.* Wallisio *pag.* 652. N° LXX.

Amplissime Domine,

NUperas meas credo acceperis, nunc istas mature summitto, ne facilitate D. *Newtoni* abuamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quædam suæ

suæ Epistolæ loca explicaret; nempe quomodo invenisset Theoremata, quod posito $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. sit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ &c. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus extractionibus derivari, sed & altera illa methodo sub finem literarum ejus exposita inveniri, qua me quoque * aliquando usum in veteribus meis Schedis reperio; sed cum in exemplo, quod forte in manus meas sumseram, nihil prodiisset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse.

Difficultatem moveram in præcedentibus literis circa æquationes impossibiles, quarum radices possibiles videntur inveniri per Series Infinitas; necdum vero illa sublata est, & meretur res excuti diligentius: illud tamen video, si in æquatione data $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. literæ z & y sint indeterminatæ, tunc æquationem semper esse possibilem; sed si z esset determinata, rursusque in ipsis a vel b &c. lateret æquatio, posset esse impossibilis, & tamen per Seriem generalem aliqua prodire videretur radix possibilis; cujus difficultatis solutionem, re diligenter expensa, reperiri posse arbitror: sed nunc ista accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari tum quomodo ex Seriebus agnosci possint æquationes esse impossibiles (quanquam id alias satis facile inveniatur) tum quomodo dignoscantur diversæ radices.

* D. *Leibnitius* Series plures reciprocas ante biennium ab *Oldenburgo* acceperat, Methodum Serierum reciprocarum anno superiore *Newtonum* rogaverat, hoc anno acceptam ægre intellexerat, & intellectam se olim invenisse ex chartis suis antiquis mox didicit: Et quamvis Series pro Hyperbola & Circulo ante annos plures haberet, & hæc methodus ex arcu daret Sinum, ex Logarithmo daret numerum, & Serierum omnium exhiberet reciprocas; eandem tamen olim inventam neglexisse ut inutilem. Sic Methodum, quam diu desideraverat, rogaverat, acceperat & ægre intellexerat, vel primus vel saltem proprio marte scilicet invenit.

Præ-

Præter ea quæ in superiore Epistola notavi, sci-
et Methodum Tangentium inversam & Geome-
cam (saltem suppositis Curvarum analyticarum
adraturis) & alia id genus,* deest nobis circa Qua-
turas ut scire certo possimus, an non quadratu-
figuræ alicujus propositæ reducatur ad quadra-
ram Circuli aut Hyperbolæ: nam pleræque fi-
ræ hactenus tractatæ ope alterutrius quadrari
tuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbi-
or) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per
rculum nec Hyperbolam, restat ut alias quasdam
uras primarias altiores constituamus, ad quarum
adraturam reducantur cæteræ omnes, quando id
ri potest. Hoc quamdiu non fit hæremus, &
pe per Seriem infinitam particularem quærimus,
od ad Circuli aut Hyperbolæ aut aliam notioris
uræ quadraturam reduci poterat. Crediderat
egorius dimensionem Curvarum Hyperbolæ &
lipseos non pendere a quadratura Circuli aut
yperbolæ; ego vero reperi aliquam speciem Cur-
Hyperbolicæ quam ex data ipsius Hyperbolæ
adratura metiri possum: de cæteris nondum mi-
liquet.

Hannoveræ 12 *Julii* 1677.

Revi postea, Autumno scilicet anni 1677, *mors* Nº LXXI.
Oldenburgi *huic literarum Commercio finem im-*
uit. Deinde anno 1682 Collins *mortuus est, &*
ta eruditorum Lipsiæ *primum edita sunt, ejusque*
i Mense Februario *prodiit D.* Leibnitii Quadra-
a Arithmetica, *Circuli scilicet & Hyperbolæ, qua-*
m prior non differt a Gregoriana *toties dicta, ne-*
posterior ab ea Vicecomitis Brounkeri, *ante qua-*
rdecim annos, in Philosophicis Transactionibus
34 *pro mense* Aprilis 1668, *publicata. Non mul-*
post, anno scilicet 1684, *in iisdem Actis* Lipsicis

*Quod hic desideratur, *Newtonus* in Epistola sua novissima significa-
se aliqua ex parte invenisse, & quod invenerat, postea publicavit
Libro de Quadratura Curvarum.

pro

pro menſe Octobri, Calculi differentialis *Elem*
primum edidit D. Leibnitius *literis* G. G. L. *de*
natus. Anno autem 1683 *ad finem vergente,*
Newtonus *Propoſitiones principales earum quæ in* P
loſophiæ Principiis Mathematicis *habentur* Lon
num *miſit, eædemque cum* Societate Regia *mox co*
municatæ ſunt; annoque 1686 *Liber ille ad Socie*
tem miſſus eſt ut imprimeretur, proximoque anno m
Martio *lucem vidit: & Exemplar ejus D.* Nico
Fatio *datum eſt ut ad* Leibnitium *mitteretur.*
inde anno 1688 *Epitome ejus in* Actis Lipſicis
preſſa eſt: qua lecta D. Leibnitius *Epiſtolam de*
neis Opticis, Schediaſma de reſiſtentia Medii & m
Projectilium gravium in Medio reſiſtente, & Ten
men de Motuum Cæleſtium cauſis compoſuit, &
Actis Lipſicis *ineunte anno* 1689 *imprimi cura*
quaſi ipſe quoque præcipuas* Newtoni *de his re*
Propoſitiones inveniſſet, idque diverſa methodo
vias novas Geometricas aperuiſſet; & librum Ne
toni *tamen nondum vidiſſet.*

* Hac licentia conceſſa authores quilibet inventis ſuis facile pr
poſſunt. Viderat *Leibnitius* Epitomen Libri in *Actis Lipſicis.*
commercium Epiſtolicum, quod cum Viris doctis paſſim hab
cognoſcere potuit Propoſitiones in libro illo contentas. Si lib
non vidiſſet, videre tamen debuiſſet antequam ſuas de iiſdem r
in itinere ſcriptas compoſitiones publicaret. Dicunt aliqui falſas
Tentaminis Propoſitiones 11, 12 & 15, & D. *Leibnitium* ab his
calculum ſuum deduxiſſe Propoſitiones 19 & 20 ejuſdem Tent
nis. Talis autem calculus ad Propoſitiones prius inventas aptari
dem potuit, non autem inventorem conſtituere.

N° LXXII Anno autem 1695 Opera Mathematica Celebe
mi *Walliſii* duobus Tomis *Oxonii* prodiere:
in Actis Eruditorum anni inſequentis Menſe *J*
nio, habetur libri Epitome; in qua ſequentia
guntur, pag. 257 & ſeq.

NEwtonianis *etiam ſeriebus jam in Anglicana*
ditione expoſitis, adjicit quædam quæ Da
G

Gregorius *Scotus Professor* Oxonienſis, & Archibaldus Pitcarnius *Medicinæ* Lugduni Batavorum *Professor, non abludentia attulerunt. Addit cap.* 95 *Algebræ pag.* 389 *apud exteros (ut verba ejus ſonant) etiam* Leibnitium & Tſchürnhauſium *nonnihil ejuſmodi præſtitiſſe, & apud* Britannos Jacobum Gregorium & Nicolaum Mercatorem, *ſed quæ ſint ut plurimum nonniſi caſus particulares intra ambitum generalem regularum* Newtoni. *Calculo quoque Differentiali* Leibnitii *affinem eſſe methodum Fluxionum* Newtoni (*in Principiis Naturæ Mathematicis primum editam*) *tum utraque eſſe antiquiorem* Barrovii; *& omnes* Walliſianæ *Arithmeticæ Infinitorum ſuperarui, quæ* Cavallerii *Geometriam promovit, ut hic* Archimedeam. *Exhibet etiam Methodum quandam* Joſephi Raphſon *pro Infinitis Seriebus, libello* Londini 1690 *edito ſub titulo Analyſeos Æquationum univerſalis comprehenſam. Cæterum ipſe* Newtonus *non minus candore quàm præclaris in rem Mathematicam meritis inſignis,* **publice & privatim agnovit,* Leibnitium *tum cum* (*interveniente celeberrimo Viro* Henrico Oldenburgo *Bremenſi,* Societatis Regiæ Anglicanæ *tunc Secretario*) *inter ipſos* (*ejuſdem jam tum Societatis Socios*) *commercium intercederet, id eſt jam fere ante annos viginti & amplius, Calculum ſuum Differentialem, Serieſque Infinitas & pro iis quo-*

* Methodum Differentialem *Moutoni* D. *Leibnrtius* habuit anno 1673, & ſuam eſſe voluit: Methodum aliam Differentialem nondum habuit: Series poſtea habuit, ſed quas anno 1675 ab *Oldenburgo* accepit, ab aliis prius accipere potuiſſet. Methodum generalem perveniendi ad ejuſmodi Series anno proximo ab *Oldenburgo* petiit, a *Newtono* accepit, antea non habuit. Methodum extrahendi Radices in Speciebus a *Newtono* ſimul accepit, qua Methodus ejus per Tranſmutationem figurarum nondum generalis, in Methodum quandam generalem evaſit, ſed inutilem: Per Extractiones ſolas res citius peragitur. Anno 1677 Methodum novam Differentialem habuit, ac tantam Methodi hujus antlquitatem Editores jactant, majorem non aſſerunt. Methodum generalem vel Serierum vel Differeutialem, *Leibnitium* vel primum vel prorio marte inveniſſe *Newtonus* nondum agnovit pnblice.

que

que Methodos generales habuisse; quod Wallisius, *in præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit, quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat. Cæterum Differentiarum consideratio* Leibnitiana, *cujus mentionem facit* Wallisius (*ne quis scilicet, ut ipse ait, causaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse*) *meditationes aperuit, quæ aliunde non æque nascebantur. Est enim Differentia Analyticum quiddam & calculi capax, & quod rei caput est, Summæ reciprocum. Eaque demum ratione factum est, ut calculus Analyticus non minus in Geometria altiore, quam* Cartesius *a suo calculo excluserat, quam in ordinaria ab ipso tractata procedat. Et quemadmodum* Apollonius *& alii Veteres habebant quidem proprietates ordinatarum pro lineis Conicis & aliis, ex quibus formatæ sunt postea æquationes a* Cartesio; *ita similiter lineæ, quas ipse* Cartesius, *quippe calculo suo intractabiles, a Geometria excluserat,* Leibnitiana *primum methodo æquationibus finitis sunt expressæ & sub leges Analyseos redactæ; qua ratione omnes earum proprietates Analytico jam calculo investigari possunt, prorsus ut in ordinariis. Et cum antea per viam figurarum & imaginationibus etiam præstantissimi Geometræ faciliora tantum assequi in his potuerint, nunc ope hujus calculi non tantum priora illa primo velut obtutu patent, quæ tunc merito admirationi erant, sed & multo magis abstrusa deteguntur ad quæ imaginatio non pertingit, in quo consistit potissimus calculi Analytici usus. Cæterum ipsum celeberrimum* Wallisium, *quo est candore, non dubitamus etiam Nostratium meditationibus, si sufficientem earum habuisset notitiam, locum ampliorem in suo Opere daturum fuisse. Sed ipse queritur, ultima Algebræ suæ pagina, hæc nostra Eruditorum Acta, in quibus bona earum pars continetur, minus sibi fuisse visa: unde neque illa satis sibi cognita ait, quæ de Geometria Incomparabilium,*

bilium, vel Analysi Infinitorum, a Leibnitio *data fu-ere, quæ libenter alioqui in suo quoque opere exhibi-turus fuerit. Cæterum hac occasione & de* Nicolao Mercatore, (*quem* Wallisius *velut inter suos recen-sere videtur) notare voluimus*, Germanum *fuisse, & ex* Holsatia *oriundum, etsi in* Angliam *habitatum concesserit; eumque primum fuisse, quantum constet, qui Quadraturam publice dederit per Seriem infini-tam, tametsi tunc quoque* Newtonus *in eadem ipso inscio incidisset, eaque multo longius produxisset.*

Excerpta ex Epistola D. J. Wallisii *ad D.* Leibni-tium, Oxonii 1° *Decemb.* 1696 *data, qua respon- detur ad ea quæ ex Actis Eruditorum modo descrip-simus.* Nº LXXIII.

DUM hæc scripturus eram; ostendit mihi non-nemo, hesterno die, *Acta Lipsica*, pro Men-se *Junii* præsentis Anni 1696. Quorum Eruditus Editor dignatus est inibi amplam meorum Operum Mathematicorum (*Oxonii* editorum) mentionem facere. Quo nomine me ipsi obstrictum sentio, et gratias habeo.

Sed conqueri videtur (saltem subinsinuare) quod, cum *Newtoni* Methodos fusius exposuerim; de *Leibnitianis* parcius dixerim. At nolim ego Te (quem magni æstimo) a me quoquo modo læsum iri. Sed gratulor potius, Te, in tanta nobilitate positum, ad res nostras Mathematicas descendere voluisse. Et tantum abest ut velim ego Tibi quo-cunque modo iniquus esse, ut siqua ferat occasio, demerere malim.

Dum addit Eruditus Editor, Illas me forte præ-teriisse quod de illis mihi non satis constiterit; id omnino verum est.

Dicam utique quod res est (neque enim fateri pudet :) Tuarum ego rerum nihil (quod memini) vidi quicquam, præter hæc duo. Quorum alte-

P rum,

rum, illud eſt quod inter *Londinenſium Collectiones Philoſophicas* habetur (ſed abſque Demonſtratione) ex *Actis Lipſicis* deſcriptum; De *Quadrato Diametri ad Aream Circuli*; ut 1 ad $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{1}$ &c. in infinitum. Quod ego meis inſerui (ut a*T factum) ad Algebræ meæ Prop. 95.

Alterum eſt illud de *Teſtudine Quadrabili*; cuju ego (ut de Tuo) mentionem facio in Algebræ mea poſtremo folio. Præter hæc duo, ſi plura nove rim, non reticuiſſem.

Tuam *Geometriam Incomparabilium* vel *Analyſi Infinitorum*, (quam ibidem a te memoratam dixi ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de no mine ante inaudiveram, quam prout ibidem a calcem Algebræ dictum eſt.

Neque *Calculi Differentialis* vel Nomen aud viſſe me memini, niſi poſtquam utrumque Vol men abſolverant operæ, eratque Præfationis (pr figendæ) poſtremum folium ſub Prelo, ejuſque t pos jam poſuerant Typothetæ. Quippe tum m monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) q peregre fuerat, tum talem methodum in *Belg* prædicari, tum illam cum *Newtoni* methodo Fl xionum quaſi coincidere. Quod fecit ut (tra moris typis jam poſitis) id monitum interſerueri

Sed ante monueram, Algebræ Prop. 95. p 389. (quod ſolum potui) *Leibnitium* & *Tſchu hauſium* talia meditatos; ſed quæ ego non videra (Necdum vidi.) Et ſicubi forte videram lite *G. G. L.* neſciebam quem illæ Virum indicaba

Extant, credo, plura in *Actis Lipſicis*; ſed q ego non vidi: Uti nec tu, credo, vidiſti *Bro*

* Ignoravit *Walliſius Gregorium* hanc Seriem anno 1671 cum *linio*, *Oldenburgum* anno 1675 cum *Leibnitio* communicaſſe; & p terea *Leibnitium* in *Anglia* fuiſſe anno 1673. *Collinius* enim, ab no 1670 Series a *Newtono* & *Gregorio* acceptas rogatus non rog liberrime nec ſine jactantia communicavit, ut ex ſuperioribus p Et *Pellius* cui hæ ſeries ignotæ non erant, cum *Leibnitio* de ſeri verba habuit.

keri Quadraturam Hyperbolæ, quæ extat in Tranſactionibus *Londinenſibus*. Mihique condonari poteſt, hac ætate, (qui annum Octogeſimum ſuperavi) ſi non omnia ſciſcitarer.

Noveram quidem jamdudum & (indicavi) de rebus hujuſmodi nonnulla te meditatum eſſe; tibique cum *Newtono* (mediante *Oldenburgo*) interceſſiſſe Literas quaſdam tuas: Sed, quas ego non vidi, nec ſcio quales fuerint: eratque *Oldenburgus* diu mortuus, ut non potuerim ab illo ſciſcitari. Rogabam quidem (per literas) *Newtonum* noſtrum, ut ſi eas penes ſe haberet, earum mihi copiam faceret literarum; ſed retulit ille, ſe non habere. (Et quidem periiſſe credo flammis inopinato correptas, cum pluribus *Newtoni* ſcriptis meliori luce dignis: & niſi per me ſtetiſſet, periiſſent etiam *Newtoni* literæ.) Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum *Newtoni* literis junctim ederem. Idque etiamnum, ſi ferat occaſio, facturus forte ſum, modo mihi dignaberis earum copiam facere.*

Quod *Henricus Oldenburgus* fuerit *Bremenſis*; & *Nicolaus Mercator Holſatus*; (quod ſuggerit Eruditus Editor) omnino verum eſſe credo; ſaltem Anglos non fuiſſe ſatis novi, (eoſque propterea *Germaniæ* veſtræ non invideo) adeoque non *Noſtrates* dixi, ſed *Apud Nos*: nec tamen ideo minus eos aut amavi, aut æſtimavi. Nam mihi perinde eſt qua quis gente ſit (*Tros Tyriuſve foret, nullo diſcrimine*) modo ſit vir bonus & bene meritus. Sed *apud Nos* diu vixerant; & quicquid hac in re fecerint, *apud Nos* factum eſt.

Quæ fuſius expoſui, ut ſentias quam Tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

* Eas tandem obtinuit D. *Wallisius* e ſchediaſmatis *Collinii*, Alteras *Newtoni* olim acceperat ab *Oldenburgo*.

N° LXXIV. *Ex Epiſtola D.* Leibnitii *ad* Walliſium *ſcripta,* $\frac{19}{29}$ *Martii, ineuntis Anni* 1697.

—— Quoniam videris nonnulla, in Actis dicta, ita accepiſſe, quaſi animi parum erga *Germanos* æqui accuſeris, & quaſi viciſſim tua recenſendo extenuentur: Putavi non ingratum Tibi fore, ſi Epiſtolam Dominis Editoribus Actorum ſcriberem (cujus hic Exemplum addo;) qua (ſi ipſis videretur) Actis iiſdem inſerta, ſatisfieri tibi, ſcrupulis illis ſublatis, poſſit. [*Habetur in Actis Lipſicis pro menſe Junio* 1697.]

Ego qui Te magni facio, & publice profeſſus ſum quantum meo judicio Tibi debeat altior Geometria, æquiſſimum puto viris præclare, non de ſuo tantum ſeculo, ſed & poſteritate, meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior eſſe poſſis, ecce verbo tenus tranſcripta quæ ipſe de Tuis meritis Geometricis dixi, *Actorum Lipſienſium Menſe Junio* 1686, *pag.* 298.

" Paucis dicam, quid potiſſimum inſignibus no-
" ſtri ſeculi Mathematicis in hoc Geometriæ
" genere mea ſententia debeatur.

" Primum *Galilæus* & *Cavallerius* involutiſſimas
" *Conouis* & *Archimedis* artes detegere cœperunt.

" Sed *Geometria Indiviſibilium Cavallerii* Scien-
" tiæ renaſcentis non niſi Infantia fuit. Majora
" ſubſidia attulerunt Triumviri celebres; *Ferma-*
" *tius*, inventa methodo de *Maximis & Minimis*:
" *Carteſius*, oſtenſa ratione Lineas Geometriæ
" communis (Tranſcendentes enim excluſit) expri-
" mendi per *Æquationes*: Et P. *Gregorius a S. Vin-*
" *centio*, multis præclaris Inventis. Quibus egre-
" giam *Guldini* Regulam de *Motu Centri Gravita-*
" *tis* addo.

" Sed & hi intra certos limites conſtitere; quos
" tranſgreſſi ſunt *Hugenius* & *Walliſius*, Geome-
tria

" tria inclyti. Satis enim probabile est *Hugeniana Heuratio*, & *Wallisiana Nelio* & *Wrennio* " (qui primi Curvis æquales Rectas demonstrave" vere) pulcherrimorum inventorum occasionem " dedisse. Quod tamen meritissimæ laudi Inven" tionum nihil detrahit.

"Secuti sunt hos *Jacobus Gregorius Scotus* & *Isaa*" *cus Barrovius Anglus*: qui præclaris in hoc ge" nere Theorematibus scientiam mirifice locuple" tarunt.

" Interea *Nicolaus Mercator Holsatus*, Mathe" maticus & ipse præstantissimus, * primus (quod " sciam) Quadraturam aliquam dedit per *Seriem* " *Infinitam*.

" At idem inventum non suo tantum Marte as" secutus est, sed & universali quadam ratione ab" solvit, profundissimi ingenii Geometra *Isaacus* " *Newtonus*. Qui, si sua cogitata ederet, quæ il" lum adhuc premere intelligo, haud dubie nobis " novos aditus ad magna Scientiæ incrementa com" pendiaque aperiret.

Quibus deinde nonnihil de iis addo, ‡ quæ mea opera accessere; Præsertim dum novo Calculi genere effeci ut etiam Algebram transcendentia Analysi subjiciantur; & Curvas, quas *Cartesius* a Geometria male excluserat, suis quibusdam † Æquationibus explicare docui. Unde omnes earum proprietates certo calculi filo deduci possunt. Exem-

* *Mercator* quadraturam D. *Brounkeri* per divisionem *Wallisianam* tantum demonstravit ut supra.

‡ *Leibnitius* recitando inventa nova Mathematica, prætermittit Methodum Fluxionum, quasi Analysis tota Infinitesimalis sola sua opera accesserat.

† Annon *Newtonus* hujusmodi æquationes prius invenit, qui docuit Fluentem ex Æquatione Fluxionem involvente extrahere, & Curvas Mechanicas ad Æquationes Numero Terminorum Infinitas reduxit, pergendo ab hujusmodi æquationibus finitis? Annon tota Fluxionum Methodus inversa, ubi de Curvis agitur, pendeat ab hujusmodi Æquationibus ad Curvas applicatis?

plo *Cycloidis*, cui Æquationem ibidem assigno, $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dz}{\sqrt{2x - xx}}$. Ubi ſ significat Summationem; & d, Differentiationem; *x*, Abscissam ex Axe inde a Vertice; & *y*, Ordinatam normalem.

De Te autem queri nunquam mihi in mentem venit; quem facile apparet nostra, in *Actis Lipsiensibus* prodita, non satis vidisse.

Quæ inter *Oldenburgum* & me commutatæ sunt Literæ, quibus aliqua accesserint a D. *Newtono* excellentis ingenii Viro, variis itineribus & negotiis ab hoc studiorum genere plane diversis, vel periere ut alia multa, vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi a necessariis occupationibus vacatio erit; quam mihi tam subito quam vellem promittere non possum.

N°LXXV. *Ex Epistola* Wallisii *ad D.* Leibnitium, *Apr.* 6. 1697.

Vir Nobilissime Celeberrimeque,

LIteras tuas humanissimas *Martii* $\frac{19}{29}$ *Hannoveræ* datas, accepi (& exosculatus sum) *Martii* 31 stilo nostro 1697; hoc est, *Apr.* 10. stilo novo. Mihique gratulor quod Nobilissimo Viro Ego Meaque non displicuerint. Veniam interim exorare debeo, si locorum distantia fecerit, ut eruditissima tua scripta & inventa minus ego sciverim aut intellexerim, quam vellem; & quidem, quis sit ille tuus *Calculus Differentialis* non satis mihi compertum sit; nisi quod mihi nuper nunciatum est, eum cum *Newtoni Doctrina Fluxionum* quasi coincidere.

Nec pudet me meam hac in parte ignorantiam fateri, qui jam ab aliquot annis contentus fuerim

(hac

(hac ætate) ***lampadem tradere***; aliiſque permittere, ut promoveant ea quæ (ſiqua) ego non infeliciter detexerim.

Quod Literas ſcripſeris (in mei gratiam) ad Editores *Actorum Lipſicorum*, favori tuo debeo, & grates habeo.

Quis eorum ille ſit, qui mea ſcripta recenſuit in *Actis Lipſicis* pro menſe *Junii* 1696, Ego quidem non ſcio; ſed ei gratias habeo. Neque enim eſt cur ego ei ſuccenſere debeam, ſi non (primo intuitu) ſtatim perſpexerit omnia quæ penitus rimanti occurriſſent, aut etiam ſint occurſura. Sufficit enim inſtituto ſuo, ut ſumma quæque carpat & magis obvia; Lectoribus permittendo, ſi penitiora deſiderent, apud Authores indicatos quærere. Nolim autem exiſtimes quod in gentem veſtram minus æquo ſim animo; nam ſecus eſt, &c.

Ubi dicitur, *Nicolaum Mercatorem primum eſſe qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam:* Vide annon mea talis ſit, Ar. Infin. Pr. 191.

$$\square = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times \&c.}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times \&c.}$$ *Et Brounkeri* $\square =$

$$1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{2\frac{49}{2\frac{81}{2}}}}} \; \&c.$$

Sed & omnes mearum tabellarum ſeries, in Arithmetica Infinitorum, ſunt *Series Infinitæ*; & earum plurimæ quales quæ Vobis dicuntur (novo nomine) Series *Tranſcendentales*.

Nolim utique ut Clariſſimo Viro fraudi ſit nova Compellatio. Nam quas ego vocaveram *Continuas Approximationes*, vocat *Jacobus Gregorius Series Convergentes*; & *Newtonus Series Infinitas*; ſed res eadem eſt. Sic quod ego vocaveram *Centrum Percuſſionis*, vocat *Hugenius* (novo nomine) *Centrum Oſcillationis*; ſed eadem res eſt. Et *Fermatii Hyperbolæ Infinitæ* eædem ſunt cum meis *Seriebus Reciprocis*. Et *Galilæi Cycloides*, *Merſenni Trochoides*,

mea *Cyclois*, & *Cusani* Curva (quocunque nomine dicatur) sunt res eadem. Sic Rectificata Curva *Nelii*, & Curva *Heuratii*, & Curva demum *Fermatii*, eadem est cum mea *Paraboloïde Semi-cubicali*. Et Gallorum *Socia Cycloidis* est ea Curva (quæ mihi,) terminat Figuram *Sinuum rectorum*. Et, ni fallor (sic saltem mihi nunciatum est) *Newtoni Doctrina Fluxionum* res eadem est (vel quam simillima) quæ vobis dicitur *Calculus Differentialis*: Quod tamen neutri præjudicio esse debet.

N° LXXVI. *Ex Epistola D.* Leibnitii *ad* Wallisium *scripta*, 28 Maii 1697.

MEthodum *Fluxionum* profundissimi *Newtoni*, cognatam esse methodo meæ *Differentiali*, non tantum animadverti * postquam opus ejus & tuum prodiit; sed etiam professus sum in *Actis Eruditorum*, & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo ‡ *Analyseos Infinitessimalis*; quæ latius quam Methodus *Tetragonistica* patet.

* Quasi *Leibnitius* hoc non advertisset anno 1677, ubi primum incidit in Methodum *Newtoni*. Vide literas ejus supra impressas, p. 195. Certe Methodum *Newtoni* ante annum 1671 inventam fuisse *Leibnitius* ex Literis ejus intellexerat, sed in Actis *Lipsicis* hoc nunquam agnovit. Vide supra p. 41, 164, 165, 166, 167. Sic & se ab *Oldenburgo* Series *Newtonianas* & *Gregorianas* ineunte anno 1675 accepisse, statim oblitus est; p. 118, 119, 120, 121. 126. Et Methodum Serierum se ab *Oldenburgo* postulasse & a *Newtono* accepisse, statim oblitus est; p. 126, 150, 151, 204. Et Problemata Tangentium inversa ab Æquationibus & Quadraturis pendere se primum negasse, & subinde a *Newtono* didicisse, statim oblitus est; p. 165, 188, 189, 199.

‡ Methodum Fluxionum & Methodum Differentialem esse unam & eandem Methodum *Leibnitius* hic agnoscit, ideoque se communi nomine Analyseos Infinitesimalis designare solere, licet in nonnullis differre possint, ut Analysis speciosa Vietæ & ea *Cartesii* in nonnullis differunt. Quæritur quis sit Analyseos hujus Infinitesimalis inventor primus, & ecquid alter alterius inventis addiderit.

Interim, quemadmodum & *Vietæa* & *Carteſiana* methodus *Analyſeos Specioſæ* nomine venit; diſcrimina tamen nonnulla ſuperſunt: ita fortaſſe & *Newtoniana* & *Mea* differunt in nonnullis.

Mihi conſideratio Differentiarum & Summarum in ſeriebus Numerorum, *primam lucem affuderat, cum animadverterem Differentias Tangentibus, & Summas Quadraturis, reſpondere. Vidi ‡mox Differentias Differentiarum in Geometria *Oſculis* exprimi. Et notavi mirabilem analogiam relationis inter Differentias & Summas, cum relatione inter Potentias & Radices. Itaque judicavi, præter affectiones quantitatis hactenus receptas y, y^2, y^3, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, &c. vel generaliter y^e, ſive $[p^e]\,y$, vel potentiæ ipſius y ſecundum exponentem e; poſſe adhiberi novas Differentiarum vel Fluxionum affectiones, dy, d^2y, (ſeu ddy,) d^3y, (ſeu $dddy$,) imo utiliter etiam occurrit $d^{\frac{1}{2}}y$, & ſimiliter generaliterque $d^e y$.

Hac jam Affectione admiſſa, + vidi commode per Æquationes exprimi poſſe quantitates quas a ſua Analyſi & Geometria excluſerat *Carteſius*; & Curvas, quas ille non recte vocat *Mechanicas*, hac ratione calculo non minus ſubjici, quam ab ipſo

* Fatetur hic *Leibnitius* Methodum Tangentium per Differentias primam lucem ipſi affudiſſe, id eſt, Methodum quam *Fermatius*, *Gregorius*, *Barrovius* coluere, *Newtonus* p. 84, 85, ad Quantitatum augmenta momentanea generaliter applicuit. Hancce Tangentium methodum *Leibnitius*, lectis *Newtonianis*, meditatur, p. 128, 165, 190, 191, 192, generalem reddit, p. 92, 93, & *Newtonianæ* ſimilem eſſe ſtatim videt, p. 195, 200.

‡ *Fermatius* & *Schootenus* hoc ante viderunt, determinando Punctum flexus contrarii in Conchoide.

+ *Leibnitius* hoc non vidit ante annum 1677. Scripſit enim anno 1676 inverſa Tangentium Problemata, & alia multa ab æquationibus non pendere. Reſcripſit *Newtonus* hujuſmodi Problemata in poteſtate eſſe, nempe per Æquationes ſuas. Et tum demum *Leibnitius* a *Newtono* admonitus hæc vidit. Vide pag. 156, lin. 1.

in

in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam Æquationes Curvarum *Locales* observaverant, sed *Cartesius* tamen utilem operam nobis navavit dum eas calculo suo expressit: ita putavi me non inutiliter facturum, si ostenderem Methodum Curvas ab ipso exclusas similiter per Æquationes exprimendi; quarum ope omnia de iis certo calculi filo haberi possint.

Et licet fatear, quemadmodum rem ipsam, in Æquationibus Curvarum Localibus facilioribus, calculo *Cartesii* expressam, jam tenebant Veteres; ita rem ipsam, meis Æquationibus Differentialibus facilioribus expressam, non potuisse Tibi aliisque egregiis Viris esse ignotam: non ideo minus tamen puto & *Cartesium* & *Me* aliquod utile præstitisse. Nam antequam talia ad constantes quosdam Characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis & imaginationis sunt peragenda, non licet in magis composita abditaque penetrare; quæ tamen, calculo semel constituto, lusus quidem jocusque videantur.

Unde jam mirum non est, * Problemata quædam, post receptum calculum meum, soluta haberi, quæ antea vix sperabantur: Ea præsertim quæ ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam. Quoniam scilicet Vulgaris Geometria minus sufficit, quoties Infiniti involvitur consideratio; quam plerisque Naturæ operationibus inesse consentaneum est, quo melius referat Autorem suum.

Hugenius certe, ‡ qui hæc studia haud dubie profundissime inspexerat, multisque modis auxerat, ini-

* Mirum est hæc a D. *Leibnitio* dici, qui ex Literis & Principiis *Newtoni* intellexerat Methodum solvendi hujusmodi Problemata *Newtono* ante annum 1671 innotuisse, & ipsum primum per hanc Methodum Problemata tractasse quæ ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam.

‡ *Hugenius* Literas quæ inter *Newtonum* & *Leibnitium* mediante *Oldenburgo* intercesserant, nunquam vidit.

tio

tio parvi faciebat Calculum meum, nondum perſpecta ejus utilitate. Putabat enim dudum nota ſic tantum nove exprimi: prorſus quemadmodum *Robervallius* & alii, initio, *Carteſii* Curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit poſtea *Hugenius* ſententiam ſuam, cum videret quam commoda eſſet hæc exprimendi ratio, & quam facile per eam res involutiſſimæ evolverentur. Itaque maximi eam a ſe fieri aliquot ante obitum annis, non tantum in privatis ad me alioſque literis, ſed publice quoque eſt profeſſus.

Cæterum *Tranſcendentium* appellationem, nequid a me præter rationem in phraſi Geometrica novari putes, ſic accipio ut Tranſcendentes quantitates opponam Ordinariis & Algebraicis: Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco Quantitates, quarum relatio ad datas exprimi poteſt Algebraice; id eſt, per Æquationes certi gradus, primi, ſecundi, & tertii, &c. quales quantitates *Carteſius* ſolas in ſuam Geometriam recipiebat: Sed *Tranſcendentes* voco, quæ omnem gradum Algebraicum tranſcendunt. Has autem exprimimus, vel per valores infinitos, & in ſpecie per Series, (neque enim ipſas Series *Tranſcendentales* voco, ſed Quantitates ipſis exprimendas) vel per Æquationes Finitas; eaſque vel Differentiales (ut cum Ordinata Cycloidis Methodo mea exprimitur per Æquationem † $y = \frac{xdx}{\sqrt{ay-yq}}$) vel Exponentiales, (ut cum incognita quædam x exprimitur per hanc Æquationem $x^x +$

† Legendum $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$. Idem ſic deſignari poteſt $y = \frac{\dot{x}x}{\sqrt{ax-xx}}$, vel ſic $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$. Et nota quod ubi Differentiæ referuntur ad ſummas, rectius dicerentur Partes. Sunt enim non Differentiæ Summarum ſed Partes, & nullam relationem habeat ad Summas, niſi quatenus ſunt earum Partes.

$x =$

$x = 1$.) Et quidem Tranſcendentium Exponentia-lem pro perfectiſſima habeo; quippe qua obtenta, nihil ultra quærendum reſtare arbitror; quod ſe-cus eſt in cæteris.

Primus autem, ni fallor, etiam *Exponentiales Æ-quationes* introduxi, cum Ignota ingreditur Expo-nentem. Et jam anno primo * *Actorum Lipſien-ſium*, ſpecimen dedi in exemplo quantitatis Ordi-nariæ *Tranſcendentaliter* expreſſæ, ut res fieret in-telligibilior; Nempe, ſi quæratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ ſatisfacere; cum ſit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

* Imo Anno 1677, Vide pag. 194, 201.

N° LXXVII. *Ex Epiſtola* Wallisii *ad* Leibnitium, Julii 30, 1697

OPtaverim item ut Tibi vacet tuum *Calculum Differentialem*, & *Newtono* ſuam *Fluxionum Methodum*, juſto ordine exponere; ut quid ſit u-trique Commune, & quid interſit Diſcriminis, & utramque diſtinctius intelligamus. *

* Ut *Leibnitius* Differentiam Methodorum exponat iterum rog[at] *Walliſius*, ſed fruſtra.

N° LXXVIII.

In Diſſertatione D. Nicolai Fatii Duillierii, *R. S. S.* *de inveſtigatione Geometrica* Lineæ Breviſſimi deſ-cenſus *&c.* Londini *Anno* 1699 *edita, pag.* 18 *hæc habentur*.

" NEwtonum primum, ac pluribus Annis vetu-
" ſtiſſimum, hujus Calculi Inventorem, ip-
" ſa rerum evidentia coactus, agnoſco: a quo u-
" trum quicquam mutuatus ſit *Leibnitius* ſecundu[s]
" ejus Inventor, malo eorum, quam meum, ſit Ju-
" dicium, quibus viſæ fuerint *Newtoni* Literæ a-
" liique ejuſdem Manuſcripti Codices.

Et respondit D. Leibnitius *in Actis Lipsiensibus Mense* Maii 1700.

" CErte cum Elementa calculi mea edidi anno
" 1684, * ne constabat quidem mihi aliud de
" Inventis ejus in hoc genere, quam quod ipse o-
" lim significaverat in literis, posse se Tangentes
" invenire non sublatis Irrationalibus; quod *Hu-*
" *genius* quoque se posse mihi significavit postea,
" etsi cæterorum istius calculi adhuc expers: sed
" majora multo consecutum *Newtonum*, viso de-
" mum libro Principiorum ejus satis intellexi.
" Calculum tamen differentiali tam similem ab eo
" exerceri, non ante didicimus, quam cum non
" ita pridem magni Geometræ *Johannis Wallisii*
" operum volumina primum & secundum prodie-
" re, *Hugeniusque* curiositati meæ favens locum
" inde descriptum ad *Newtonum* pertinentem mi-
" hi mature transmisit.

Et post aliqua de Methodi hujus parte sublimiore verba faciens, addit: " Quam [*Methodum*] ante
" Dominum *Newtonum* & me nullus quod sciam
" Geometra habuit; uti ante hunc maximi nomi-
" nis Geometram, NEMO specimine publice da-
" to se habere probavit: ante Dominos *Bernoullios*
" & Me nullus communicavit.

* Constabat certe D. *Leibnitio*, jam ab anno 1677, Curvarum Quadraturas faciliores reddi, & Problemata Tangentium inversa D. *Newtoni* Methodis solvi; idque nonnunquam per quadraturas solas, nonnunquam per Methodos generaliores. Confer Literas ejus pag. 195, & seq. cum pag. 164, 165, 166, 188, 189, ut & cum pag. 105. lin. 22, 23, & pag. 128, lin. 7, 11, 23.

D. Fatio *autem Replicationem suam ad* Editores Lipsienses *ut publicaretur mittente, Hi, quasi lites aversati, eandem Actis suis inserere recusarunt. Vide* Act. Lips. Martii 1701, *pag.* 134.

Tan-

N° LXXIX. *Tandem ubi prodiere* Newtoni *Libri de Numero Cur-varum ſecundi generis, deque Quadratura Figura-rum, Editores* Actorum Lipſienſium, *ſtylo* Leib-nitiano, *Synopſin libri prioris his verbis concluſe-runt. Vide* Act. Lipſ. Januarii 1705.

*CÆterum autor non attingit Focos vel Umbilico[s] Curvarum ſecundi generis, & multo minus gen[e]-rum altiorum. Cum *ergo ea res abſtruſioris ſit in-daginis & maximi tamen in hoc genere uſus, tum a[d] deſcriptiones tum ad alias proprietates Curvarum, & doctrina hæc Focorum ab illuſtriſſimo D.* † D. T. *profundius ſit verſata; ſupplementum ejus pro his Cur-vis ab ipſius ingenio expectamus.*

Dein libri alterius Synopſin ſequentem (ſi Sy-nopſis dici mereatur) eodem ſtylo ſubjunxerunt.

Ingenioſiſſimus deinde Autor antequam ad Quadra-turas Curvarum (vel potius Figurarum Curvilinea-rum) ‡ *veniat, præmittit brevem* Iſagogen. *Qu[am]* || *ut melius intelligatur, ſciendum eſt cum magnitud[o] aliqua continue creſcit, veluti Linea (exempli gratia) creſcit fluxu Puncti quod eam deſcribit,* ** *incremen-ta illa momentanea appellari differentias, nempe in-ter magnitudinem quæ antea erat, & quæ per muta-tionem momentaneam eſt producta; atque hinc natu[m] eſſe Calculum Differentialem, eique reciprocum Sum-*

* Compilatores Actorum in ſcribendis librorum Breviariis, a cen-ſuris temerariis abſtinere debent. Ex hac cenſura patet animus ſcrip-toris in D. *Newtonum*.

† Literis D. T. *Tſchürnhauſius* deſignatur.

‡ Hæc *Iſagoge* & Scholium Propoſitionis ultimæ ſcripta ſunt ub[i] liber prodiit, reliqua ex MS. antiquo manibus amicorum trito im-preſſa ſunt.

|| Ut *Iſagoge* melius intelligatur, *Leibnitius* deſcribit calculum ſu-um differentialem & omittit calculum *Newtonianum*, quem ſolum de-ſcribere debuiſſet. Hoc fecit, non ut calculus *Newtonianus* in *Iſa-goge* traditus melius intelligatur, ſed ut rejiciatur.

** Incrementa illa momentanea *Newtonus* momenta, *Leibnitiu[s]* poſtea differentias vocavit. Et inde natum eſt nomen Calculi diffe-rentialis.

ma-

matorium; cujus elementa ab inventore D. Godefrido Guilielmo Leibnitio *in his Actis sunt tradita, variique usus tum ab ipso, tum a D. D. Fratribus* Bernoulliis, *tum & D. Marchione* Hospitalio, (*cujus nuper extincti immaturam mortem omnes magnopere dolere debent, qui profundioris doctrinæ profectum amant) sunt ostensi. Pro differentiis igitur* Leibnitianis *D.* Newtonus * *adhibet, semperque adhibuit,* Fluxiones, quæ sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita; *iisque tum in suis Principiis Naturæ Mathematicis, tum in aliis postea editis eleganter est usus, quemadmodum &* Honoratus Fabrius *in sua Synopsi Geometrica, motuum progressus* Cavallerianæ *methodo substituit.* Subinde Editores vice Symbolorum *Newtoni* describunt symbola *Leibnitii*, & postea librum *Newtoni* sic breviter attingunt. *Cum regressus a Differentiis ad quantitates, vel a quantitatibus ad summas, vel denique a Fluxionibus ad Fluentes non semper Algebraice fieri possit, ideo quærendum est, tum quibus casibus Quadratura Algebraice succedat, tum quomodo Algebraico successu deficiente aliquid subsidiarium adhiberi queat. In utroque enim a D.* Newtono *est utilissime laboratum, tum alias, tum in hoc Tractatu de Quadraturis, ubi Series adhibet Infinitas quæ eo casu quo abrumpuntur seu finiuntur, quæsitum Algebraice exhibent. De* ‡ *quo etiam dictum*

* Sensus verborum est quod *Newtonus* Fluxiones Differentiis *Leibnitianis* substituit, quemadmodum *Honoratus Fabrius* motuum progressus *Cavalleriana* methodo substituerat; id est, quod *Leibnitius* Author primus fuit hujus Methodi, & *Newtonus* eandem a *Leibnitio* habuit, substituendo Fluxiones pro Differentiis.

‡ Sensus est quod, Quæ *Newtonus* habet in hoc Tractatu de Quadraturis, & speciatim de Quadraturis illis ubi Series abrumpuntur vel finiuntur, a *Cheynæo* & *Craigio* prius dicta sunt, & in his Actis nuper exhibita; quæ quia multa sunt, faciunt ut a *Newtonianis* recensendis Editores Actorum supersedeant. Et eodem sensu D. *Leibnitius* ad Secretarium Societatis Regiæ nuper scripsit, *suum cuique hic redditum esse*, quasi secundam *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epistolam ad se missam & supra impressam nunquam legisset. Vide pag. 166, 167, 168, 169.

dictum est nuper in recensione Tractatus D. Cheynæi, *Medici* Scoti Londini *degentis. Conferri etiam potest Tractatus D.* Craigii Scoti *de Quadraturis, & ejusdem Theorema ad Quadraturas pertinens, nuper in his Actis exhibitum; quæ faciunt etiam ut ipsis Theorematis* Newtonianis *recensendis supersedeamus, quia paucis exponi non possunt: quemadmodum nec ejusdem Theoremata quædam reductionis ad Quadraturas faciliores.*

His permotus D. Joannes Keill, *in Epistola in* Philosophicis Transactionibus *A. C.* 1708, *mensibus* Septemb. & Octob. *impressa, scripsit in contrarium, quod* Fluxionum Arithmeticam, sine omni dubio, primus invenit Dominus *Newtonus*, ut cuilibet ejus Epistolas a *Wallisio* editas legenti facile constabit. Eadem tamen Arithmetica postea mutatis Nomine & Notationis modo, a Domino *Leibnitio* in *Actis Eruditorum* edita est.

N°LXXX *Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *Regiæ Societatis Secretarium,* 4° Martii *S. N.* 1711 *data.*

GRatias ago quod novissimum Volumen præclari Operis *Transactionum Philosophicarum* ad me misisti; quamvis nunc demum mihi *Berolinum* excurrenti redditum sit. Itaque excusabis quod pro munere superioris anni nunc demum gratiæ dudum debitæ redduntur.

Vellem inspectio Operis me non cogeret nunc secunda vice ad vos querelam deferre: Olim *Nicolaus Fatius Duillierius* me pupugerat in publico scripto, tanquam alienum Inventum mihi attribuissem. Ego eum in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* meliora docui; & vos ipsi, ut ex Literis a Secretario Societatis vestræ inclytæ (id est, quantum me-

memini, a Teipso) scriptis didici, hoc improbastis. Improbavit *Newtonus* ipse vir excellentissimus, (quantum intellexi) præposterum quorundam hac in re erga vestram gentem & se studium. Et tandem D. *Keillius* in hoc ipso volumine, mense *Sept. Octob.* 1708, pag. 185, renovare ineptissimam accusationem visus est, cum scripsit, *Fluxionum Arithmeticam a* Newtono *inventam, mutato nomine & notationis modo a me editam fuisse.* Quæ qui legit, & credit, non potest non suspicari alterius inventum a me larvatum subdititiis nominibus characteribusque fuisse protrusum. Id quidem quam falsum sit nemo melius ipso D. *Newtono* novit. Certe ego nec nomen Calculi Fluxionum fando audivi, nec Characteres quos adhibuit D. *Newtonus* his oculis vidi, antequam in *Wallisianis* Operibus prodiere. Rem etiam me habuisse, multis ante annis quam edidi, ipsæ literæ apud *Wallisium* editæ demonstrant. Quomodo ergo aliena mutata edidi quæ ignorabam.

Etsi autem D. *Keillium* (a quo magis præcipiti judicio quam malo animo peccatum puto) pro calumniatore non habeam; non possum tamen non ipsam accusationem in me injuriam pro calumnia habere. Et quia verendum est ne sæpe vel ab improbis vel ab imprudentibus repetatur; cogor remedium ab Inclyta vestra Societate Regia petere. Nempe æquum esse vos ipsi credo judicabitis, ut D. *Keillius* testetur publice, non fuisse sibi animum imputandi mihi quod verba insinuare videntur, quasi ab alio hoc quicquid est Inventi didicerim & mihi attribuerim. Ita ille & mihi læso satisfaciet, & calumniandi animum a se alienum esse ostendet; & aliis aliâs similia aliquando jactaturis frœnum injicietur. Quod superest vale & fave.

Dabam *Berolini* 4 *Martii* 1711.

N° LXXXI.

Epiſtola D. Johannis Keill, *A. M. ex Æde Chriſti* Oxon. R. S. *Socii, & jam Aſtronomiæ Profeſſoris* Saviliani, *ad D.* Hans Sloane *M. D.* Regiæ Societatis *Secretarium, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

CUM D. *Leibnitii* Epiſtolam mecum Vir Cl. communicare dignatus ſis; ea etiam quæ mihi viſum fuerit reſcribere, ne graveris accipere. Sentio Virum egregium acerrime de me queri, quaſi ei injuriam fecerim, & rerum a ſe inventarum gloriam alio tranſtulerim; fateor querelam hanc ideo mihi moleſtam eſſe, quod nolim ea ſit de me hominum Opinio, quaſi ego calumniandi ſtudio, cuiquam in rebus Mathematicis verſanti, nedum Viro in iiſdem verſatiſſimo, obtrectarem; certe nihil ab ingenio meo magis alienum eſt, quam alterius laboribus quicquam detrahere.

Agnoſco me dixiſſe Fluxionum Arithmeticam a D. *Newtono* inventam fuiſſe, quæ mutato Nomine & Notationis modo a *Leibnitio* edita fuit; ſed nollem hæc verba ita accipi, quaſi aut Nomen quod Methodo ſuæ impoſuit *Newtonus*, aut Notationis formam quam adhibuit, D. *Leibnitio* innotuiſſe contenderem; ſed hoc ſolum innuebam, D. *Newtonum* fuiſſe primum inventorem Arithmeticæ Fluxionum, ſeu Calculi Differentialis; cum autem in duabus ad *Oldenburgum* ſcriptis Epiſtolis, & ab illo ad *Leibnitium* tranſmiſſis, indicia dediſſe perſpicaciſſimi ingenii viro ſatis obvia; unde *Leibnitius* principia iſtius Calculi hauſit, vel ſaltem haurire potuit: At cum Loquendi & Notandi formulas quibus uſus eſt *Newtonus*, Ratiocinando aſſequi nequiret Vir illuſtris, ſuas impoſuit.

Hæc ut ſcriberem impulerunt Actorum Lipſienſium Editores, qui in ea quam exhibent operis *Newtoniani* de Fluxionibus ſeu Quadraturis enarra-

tion-

tione, diserte affirmant D. *Leibnitium* fuisse istius Methodi Inventorem, & *Newtonum* aiunt pro Differentiis *Leibnitianis* Fluxiones adhibere, semperque adhibuisse. Id quidem in iisdem scriptoribus observatu dignum, quod Loquendi & notandi formam a *Newtono* adhibitam, in *Leibnitianam* passim in eadem enarratione transferunt; de Differentiis scilicet & Summis & calculo Summatorio loquuntur, de quibus est nullus apud *Newtonum* Sermo; quasi inventa *Newtoni Leibnitianis* posteriora fuerint, & a Calculo *Leibnitii* in Actis Lipsiensibus Anno 1684 descripto ortum derivarint. Cum revera *Newtonus*, ut ex sequentibus patebit, Fluxionum Methodum invenerit, octodecim saltem annos antequam *Leibnitius* quicquam de Calculo Differentiali edidisset, Tractatumque de ea re conscripserit; cujus cum specimina quædam *Leibnitio* ostensa sint, rationi non incongruum est, ea aditum illi ad Calculum Differentialem aperuisse.

Unde si quid de *Leibnitio* liberius dixisse videar, id eo animo feci, non ut ei quicquam eriperem, sed ut quod *Newtoni* esse arbitrabar, auctori suo vindicarem.

Maxima equidem esse *Leibnitii* in Rempublicam Literariam merita lubens agnosco; nec eum in reconditiore Mathesi Scientissimum esse diffitebitur qui ejus in Actis Lipsiensibus scripta perlegerit: cum autem tantas tamque indubitatas opes de proprio possideat, certe non video cur spoliis ab aliis detractis onerandus sit. Quare cum intellexerim populares suos ita illi favere, ut eum laudibus non suis accumulent; *haud præposterum in gentem nostram studium esse duxi*, si *Newtono* quod suum est tueri & conservare anniterer. Nam si Lipsiensibus fas fuerit aliena *Leibnitio* affingere, *Britannis* saltem ea quæ a *Newtono* erepta sunt sine crimine calumniæ reposcere licebit; itaque cum ad Regiam Societatem appellet Vir illustris, meque pu-

 blice

blice testari velit calumniandi animum a me alie-
num esse, ut Calumniandi crimen a me amoveam,
mihi ostendendum incumbit D. *Newtonum* verum
& primum fuisse Arithmeticæ Fluxionum seu Cal-
culi Differentialis Inventorem; deinde ipsum adeo
clara & obvia Methodi suæ indicia *Leibnitio* de-
disse, ut inde ipsi facile fuerit in eandem Metho-
dum incidere.

Sciendum vero primum est, Celeberrimos tunc temporis Geometras, Dominos *Franciscum Slusium*, *Isaacum Barrovium*, & *Jacobum Gregorium*, Me- thodum habuisse qua Curvarum Tangentes duce- bant, quæ a Fluxionum Methodo non multum abludebat; & iisdem principiis innixa fuit. Nam si pro Litera *o*, quæ in *Jacobi Gregorii* Parte Ma- thescos Universali quantitatem infinite parvam re- præsentat; aut pro Literis *a* vel *e* quas ad eandem designandam adhibet *Barrovius*; pronamus $\dot{x}$ vel *Newtoni*, vel d*x* seu d*y* *Leibnitii*, in Formulas Flu- xionum vel Calculi Differentialis incidemus, & regressus quo a data Tangentium proprietate ad naturam Curvæ perveniebant (quem Methodum Tangentium inversam nominabant) eadem plane r erat ac Methodus qua a Fluxionibus ad Fluent revertitur: interim suam Methodum non ultra Flu- xiones primas extendebant; neque eandem a Quantitates Surdis aut Fractionibus involutas ac- commodare potuerunt. At prius quam quicqua de hoc argumento a summis hisce viris public datum est, D. *Newtonus* Methodum excogitavi priori quidem non dissimilem sed multo latius p tentem, quæ non substitit ad Æquationes eas quibus una vel utraque quantitas indefinita Rad calibus est involuta, sed absque ullo æquationu apparatu Tangentem confestim ducere monstraba Quæstiones de Maximis & Minimis eodem Arti cio tractabat, & Speculationes de Quadraturis f

c

cilius explicuit. Hæc constant ex Epistola *Newtoni* ad D. *Collinium* data, *Decembris* Die 10, Anno 1672, & inter *Collinii* Chartas reperta.

Hæc Epistola habetur impressa pag. 29, 30.

Ex hac Epistola clare constat D. *Newtonum* Methodum Fluxionum habuisse ante annum 1670, eodem nempe quo *Barrovii* Lectiones editæ sunt.

Anno 1669 misit *Newtonus* ad D. *Collinium* Tractatum de Analysi per Æquationes Infinitas; quem etiam inter schedas *Collinii* repertum D. *Jones* nuper edidit. Sub hujus fine habetur demonstratio Regulæ pro Quadraturis Curvarum, nata ex proportione Augmentorum nascentium Abscissæ & Ordinatæ, cum Abscissa sit z & Ordinata $x^{\frac{p}{n}}$; quæ quidem demonstratio commune fundamentum est tam Doctrinæ Fluxionum, quam Calculi Differentialis: ex eo autem Tractatu non pauca amicis suis communicanda deprompsit *Collinius*. Unde certum est D. *Newtono* ante illud tempus Fluxionum Arithmeticam innotuisse. Præterea constat ex posteriore *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epistola: "Eum suadentibus amicis circa annum 1671 Tractatum de hisce rebus conscripsisse; quem una cum Theoria Lucis & Colorum in publicum dare statuerat: scribitque *Oldenburgo* Series Infinitas non magnam ibi obtinuisse partem; seque alia haud pauca congessisse, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve cum *Oldenburgo* communicaverit; sed quæ generalior facta, non ad Æquationes, quæ Surdis aut Fractionibus involutæ sunt, hærebat; & eodem fundamento usum ad Theoremata generalia, Quadraturas Curvarum spectantia, pervenisse se ait *Newtonus*. Horum unum Exempli loco in ipsa Epistola ponit; Seriem exhibens cujus termini dant Quadraturam Cur- N° LXXXII.

" væ, cum abſciſſa eſt z & Ordinatim-applicata " $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda}$. Quæ Series abrumpitur & terminis finitis Curvæ Quadraturam comprehendit, quandocunque illa finita æquatione exprimi poteſt. Hoc dicit eſſe primum Theorematum Generaliorum; unde ſequitur eum alia ad Caſus difficiliores & magis intricatos accommodata habuiſſe: eſt autem Theorema illud propoſitio V in Tractatu de Quadraturis. Eodem etiam ſpectat ejuſdem Prop. VI, ſed ad Caſus magis implicatos ſe extendit. Propoſitiones Tertia & Quarta ſunt Lemmata Theor hiſce demonſtrandis præmiſſa, Secunda autem in Quadraturis propoſitio extat in Tractatu de Analyſi per Æquationes Infinitas, & prima Propoſitio eſt ea ipſa, quam in dicta Epiſtola fundamentum Operationum vocat, & tranſpoſitis Literis celari tunc voluit. Scribit etiam *Newtonus* ſe du dum Theoremata quædam, quæ comparationi Curvarum cum ſectionibus Conicis inſerviant, in Catalogum retuliſſe, & Ordinatas Curvarum quæ ad eam normam comparari poſſunt, in eadem Epiſtol deſcribit; quæ profecto eodem plane ſunt cum iis quas Tabula ſecunda ad Scholium Propoſitionis X in Tractatu de Quadraturis, exhibet; unde ſatis lique Tabulam illam & Propoſitiones 7, 8, 9 & 10 qu ſunt in Tractatu de Quadraturis, (a quibus Tabul pendet) *Newtonum* dudum inveniſſe ante annu 1676, quo ſcripta eſt Epiſtola illa poſterior. Cu vero, in prima ad *Oldenburgum* Epiſtola, dicit ab ejuſmodi ſtudiis per Quinquennium abſtinuiſſ hinc ſatis clare colligi poteſt, Propoſitiones in Tractatu de Quadraturis a D. *Newtono* inventas fuiſſ quinquennio ſaltem antequam Epiſtolæ illæ ad *Oldenburgum* ſcriptæ eſſent, totamque illam de Fluxionibus Doctrinam, ante illud tempus ulterius *Newtono* provectam eſſe, quam ad hunc uſque di em a quoquam alio factum eſt ſub nomine Calcu

Di

Differentialis. Certe neminem novi qui in hac provincia peragranda æquis passibus cum *Newtono* progressus sit: & pauci sunt, iique insignes Geometræ, qui prospicere queant, quousque ille in eadem provincia processerit. Præterea in posteriore illa ad *Oldenburgum* Epistola modum describit, quo in Seriem inciderit cujus termini Fluxiones seu Differentias quantitatum in infinitum exhibent; quæ postquam inventa esset, dicit Pestem ingruentem ipsum coegisse hæc studia deserere & alia cogitare. At Pestis illa contigit Annis 1665 & 1666; unde patet, etiam ante illud tempus Fluxionum Calculum D. *Newtono* innotuisse, hoc est duodecim saltem Annos antequam Calculum suum *Oldenburgo* communicavit *Leibnitius*; & novemdecim annos antequam Vir Illustris eandem in Actis Lipsiensibus edidit: & certe ante visas hasce duas *Newtoni* Epistolas, *Leibnitium* Calculum suum Differentialem habuisse nulla apparent vestigia. His omnibus rite perpensis certissime cuivis constabit, D. *Newtonum* pro vero Inventore Arithmeticæ Fluxionum habendum esse.

Restat jam ut inquiramus quænam fuere Indicia *Leibnitio* a *Newtono* derivata, unde ei facile foret Calculum Differentialem elicere. Et primo, ut dixi, nullibi ostendit *Leibnitius* sibi notum fuisse Calculum Differentialem, ante visas has duas *Newtoni* Epistolas; imo ante illud tempus longiore usus est circuitu, cum res facilius multo & succinctius ex Calculo fluerent Differentiali. Hujus rei testis sit Epistola ad *Oldenburgum* data $\frac{18}{28}$ *Novembris* 1676, quæ in Operum *Wallisianorum* Tomo tertio etiam extat, in qua modum tradit exprimendi rationem subtangentis ad Ordinatam, in terminis quos non ingreditur Ordinata; ubi si loco *y* & d*y* ipsarum valores vinculo inclusos posuisset, statim scopum attigisset. N° LXXXIII.

In prima Epistola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* transmissa est, docuit *Newtonus* methodum qua quantitates in Series Infinitas reducendæ sint, *i. e.* qua quantitatum fluentium incrementa exhiberi possunt. In ipso enim initio Seriem ostendit, cujus Termini hæc incrementa repræsentant. Sed illa D. *Leibnitium* prorsus latebat, ante visam *Newtoni* Epistolam qua exponitur.

Sit o incrementum momentaneum quantitatis fluentis x, & $\frac{m}{n}$ index dignitatis ejusdem, & si pro x scribatur $x+o$, $x+2o$, $x+3o$, $x+4o$, &c. & Quantitates $\overline{x+o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+2o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+3o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+4o}|^{\frac{m}{n}}$, &c. in Series Infinitas expandantur, habebimus totidem Series, quarum prima hæc est quæ sequitur, $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$ &c. In omnibus Seriebus primus terminus erit ipsa quantitas fluens $x^{\frac{m}{n}}$; & si prior quælibet Series a posteriore auferatur, habebimus harum Serierum differentias primas, in quibus omnibus primus terminus est Seriei primæ terminus primus quem ingreditur quantitas o, scil. $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$; & evanescente o fit ille terminus differentiis hisce primis æqualis; vel quod idem est, erit quantitas $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$ Fluentis incrementum primum.

Præterea si differentia quælibet prior a posteriori auferatur, deveniemus ad differentias secundas; quarum omnium terminus primus per 2 divisus,

visus, idem est cum termino secundo Seriei primæ quem ingreditur quantitas o; & evanescente o fiunt differentiæ illæ per Binarium divisæ singulæ æquales termino illi primo Seriei, qui est $\frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-3n}{n}}$. Et eodem modo inveniemus supra descriptæ Seriei terminum $\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$, æqualem esse singulis differentiis tertiis per sex divisis. Et quilibet terminus ejusdem Seriei ad differentias respectivas semper habebit datam rationem, scil. terminus primus quem ingreditur o æqualis est differentiis primis, secundus est differentiarum secundarum pars media, tertius pars sexta differentiarum tertiarum &c. Hasce Series, quarum termini differentias omnes in infinitum repræsentant, invenit *Newtonus*, uti dixi, ante annum 1665; sed illæ ante visam *Newtoni* Epistolam, in qua exponitur, D. *Leibnitius* * latebant; nam ante illud tempus agnoscit *Leibnitius* semper ipsi necesse fuisse transmutare quantitatem irrationalem in Fractionem rationalem, & deinde, dividendo *Mercatoris* Methodo, Fractionem in Seriem reducere. Exinde etiam patet Seriem hanc differentias continentem non habuisse D. *Leibnitium*, quod postquam ipsi per *Oldenburgum* ostensa est, * rogat ut D. *Newtonus* ipsius originem sibi pandat.

Sit jam quantitas quælibet ex constanti & indeterminatis utcunque composita & vinculo inclusa, scil. $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$, cujus differentia habenda est; constat per Regulam prius traditam quantitatis $a+bx^c$ differentiam esse $cbx^{c-1}o$ (posito quod o sit incrementum momentaneum Fluentis x) quare si

* Vide Epistolam *Leibnitii* ad *Oldenburgum* 27 *Augusti* 1676. pag. 152.

erit

pro $a+bx^c$ ſcribatur z, & pro $cbx^{c-1}o$ ſcribatur ω; erit $\overline{a+bx^c+cbx^{c-1}o}|^{\frac{m}{n}} = \overline{z+\omega}|^{\frac{m}{n}}$; quæ ſi per regulam *Newtoni* in Seriem expandatur, fit $z^{\frac{m}{n}} +$ $\frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}}$ + &c. cujus Seriei terminus $\frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}}$ eſt differentia prima quantitatis $z^{\frac{m}{n}}$, ſeu $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$. Unde ſi loco z & ω reſtituantur ipſorum valores $a+bx^c$ & $cbx^{c-1}o$, habebimus differentiam quantitatis $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}cbx^{c-1}o \times \overline{a+bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$: vel ſi more *Leibnitiano* pro o ponatur dx, erit quantitatis $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$ differentia $\frac{m}{n}cbx^{c-1}\mathrm{d}x \times \overline{a+bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$; ubi videmus quantitatem differentialem $\frac{m}{n}cbx^{c-1}\mathrm{d}x$ extra vinculum ſemper manere. Atque hinc facile fuit D. *Leibnitio*, ope Regulæ *Newtonianæ*, differentias quantitatum omnium exhibere, utcunque quantitates fluentes Surdis aut Fractionibus ſint implicatæ: id quod ante Epiſtolicum illud per *Oldenburgum* cum *Newtono* commercium ipſi minime notum fuit.

Quamvis hæc per ſe ſatis manifeſta ſunt Calculi Differentialis indicia; in ſecunda tamen Epiſtola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* miſſa eſt, alias adhuc clariores deſcribit *Newtonus* Methodi ſuæ notas. Dicit enim ſe habuiſſe methodum ducendi Tangentes, quam ſolertiſſimus *Sluſius* ante annos duos treſve *Oldenburgo* impertitus eſt, ita ut habito ſuo fundamento nemo poſſet Tangentes aliter ducere, niſi de induſtria a recto tramite erraret. Quinetiam ibi quoque oſtendit " Methodum hanc non hærere ad æqua-

" tiones

" tiones quibus una vel utraque quantitas indefini-
" ta radicalibus involuta est; sed absque ulla æqua-
" tionum reductione (quæ opus plerumque red-
" deret immensum) Tangentem confestim duci,
" & eodem modo in quæstionibus de Maximis &
" Minimis aliisque quibusdam rem sic se habere.
" Fundamentum harum Operationum dicit esse
" satis obvium, quod tamen transpositis literis in
" illa Epistola celare voluit: hoc etiam adjicit,
" hoc Fundamento speculationes de Quadraturis
" Curvarum simpliciores se reddidisse; & ad The-
" oremata quædam generalia se pervenisse scribit.

Cum vero Methodus *Slusiana* tunc temporis *Leibnitium* minime latere potuit; utpote in Actis Philosophicis *Lond.* publicata: Cumque *Newtonus* dicit eandem & sibi innotuisse, ex fundamento quo habito non hærebat ad æquationes radicalibus utcunque involutas; (in qua quidem tota rei difficultas posita est.) Cumque in priore Epistola Seriem descripsit, cujus ope differentiæ haberi possunt, ubi Fluentes Surdis aut Fractionibus utcunque implicatæ sunt: Cum denique idem Fundamentum ad Quadraturas Curvarum se applicuisse dicit; minime dubitandum est hæc omnia facem *Leibnitio* prætulisse, quo facilius Methodum *Newtoni* perspiceret.

Quod si hæc non suffecisse videantur indicia; No LXXXIV.
etiam ulterius processit *Newtonus*, & Exempla Methodi suæ dedit, & Regulam ostendit, qua ex datis quarundam Curvarum Ordinatis, earundem Areæ exhibentur in terminis finitis, cum hoc fieri potest; hoc est, in Stylo *Leibnitiano*, ipsi exempla tradidit quibus a Differentiis ad Summas pervenitur. Et a simplicioribus orsus, * proponit primo Parabolam cujus abscissa est z, & Ordinatim applicata $\sqrt{az} = a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$, & Curvæ Area erit $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; hoc

* Vide pag. 72.

est,

est, quando differentia Areæ est $dz \times \sqrt{az}$, seu $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} \times dz$, ostendit fore Aream $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; unde vicissim concluditur, si quantitas differentianda sit $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$, fore ejus differentiam $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz$ seu $\frac{3}{2}dz\sqrt{az}$. Exemplum ejus secundum est Curva cujus abscissa est z, & Ordinatim-applicata $\frac{a^4z}{\overline{c^2-z^2}|^2}$: ubi ostendit *Newtonus* Curvæ Aream fore $\frac{a^4}{2c^2-2z^2}$, hoc est si differentia Areæ sit $\frac{a^4zdz}{\overline{c^2-z^2}|^2}$, ostendit Aream fore $\frac{a^4}{2c^2-2z^2}$. Unde vicissim si quantitas differentianda sit $\frac{a^4}{2c^2-2z^2}$, concludi potest differentiam fore $\frac{a^4z \times dz}{\overline{c^2-z^2}|^2}$. Vel si ejusdem Curvæ Ordinata sic enuncietur $\frac{a^4}{z^2 \times \overline{c^2z^{-2}-1}|^2}$, erit Area $= \frac{a^4z^2}{2c^4-2c^2z^2}$. Quare & vicissim, si quantitas differentianda sit $\frac{a^4z^2}{2c^4-2c^2z^2}$, erit differentia $\frac{a^4dz}{z^2 \times \overline{c^2z^{-2}-1}|^2}$

Hinc ad exempla quædam difficiliora progreditur *Newtonus*, in iisque ostendit, quomodo ab Ordinatis, hoc est a Differentiis ad Summas perveniendum sit: ex quibus patebit, Curvam omnem quadrabilem fore, cujus Ordinata in Differentiam Abscissæ ducta sit quantitatis alicujus differentia; & hinc innumera Curvarum genera assignari possunt etiam Geometrice quadrabilia.

His indiciis atque his adjutum Exemplis, Ingenium vulgare Methodum *Newtonianam* penitus discerneret; ita ut ne suspicari fas sit, eam acerrimum *Leibnitii* acumen posse latuisse; quem quidem

dem usum fuisse his ipsis clavibus, ad hæc sua quæ feruntur inventa, aditum, etiam ex ipsius ore satis elucescit. Nam in Epistola ad *Oldenburgum* data, post explicatum Calculum Differentialem, exemplum addit, quod coincidere agnoscit cum Regula *Slusiana*, & postea addit. * "Sed Methodus ipsa priore nostra longe est amplior, non tantum enim exhiberi potest cum plures sint literæ indeterminatæ quam *x* & *y* (quod sæpe fit maximo cum fructu) sed & tunc utilis est, cum interveniunt Irrationales, quippe quæ eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est Irrationales tolli; quod in Regula *Slusii* necesse est, & Calculi difficultatem in immensum auget." Hæc omnia a *Newtono* prius in secunda ejus Epistola dicta sunt. Inde Exempla proponit, quorum quidem quod primum est, nescio quo fato, idem prorsus est ac id, quod, in ea Epistola quam *Leibnitio* transmiserat *Oldenburgus*, etiam primum protulerit *Newtonus*.

Mox addit Vir illustrissimus, * "Arbitror quæ celare voluit *Newtonus* de Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit ex hoc Fundamento Quadraturas quoque reddi faciliores, me in hanc sententia confirmat: nimirum semper Figuræ illæ sunt quadrabiles, quæ sunt ad Æquationem Differentialem. Æquationem Differentialem voco talem qua valor ipsius d*x* exprimitur, quæque ex alia derivata est, qua valor ipsius *x* exprimebatur." Et paulo post, suam de hac re Sententiam plenius aperit, dicitque hanc unicam Regulam pro infinitis Figuris quadrandis inservire, diversæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari solebant. Quis est jam qui hæc perpendet & non videbit Indicia & Exempla *Newtoni* satis a *Leibnitio* perspecta fuisse; saltem quoad differentias primas? Nam quoad Differentias secundas, *Leibnitium* Methodum *Newtonianam* tardius in-

* Vide pag. 195.

intellexisse videtur, quod brevi forsan clarius monstrabo.

Interim facile illustri Viro assentior, & credo eum nec nomen Calculi Fluxionum fando audivisse; nec Characteres quos adhibuit *Newtonus* oculis vidisse, ante quam in *Wallisianis* operibus prodiere. Observo enim ipsum *Newtonum* sæpius mutasse nomen & Notationem Calculi. In Tractatu de Analysi Æquationum per Series *Infinitas, incrementum Abscissæ per literam *o* designat: Et in Principiis Philosophiæ Fluentem quantitatem Genitam vocat, ejusque incrementum Momentum appellat: Illam literis majoribus A vel B, hoc minusculis *a* & *b* designat.

Id etiam ultra agnosco, inter cætera quæ de re Mathematica præclare meritus est *Leibnitius*, hoc itidem illi deberi, quod primus fuerit qui Calculum hunc typis edidit & in publicum produxit: itaque eo saltem nomine magnam apud Matheseos amantes inibit gratiam, quod Inventum ita nobile, & in multiplices usus deducendum, diutius eos noluerit latere.

Habes, Vir Cl. quæ de hoc argumento scribenda duxi, unde facile credo percipies, hoc qualecunque fuerit meum in Gentem nostram studium, ita parum præposterum fuisse, ut nihil omnino nisi quod *Newtoni* erat, *Leibnitio* detraxerim; nec dubito quin æqui rerum æstimatores uno ore fateantur me, uti nullo calumniandi animo, ita nec præcipiti Judicio, ea dixisse, quæ tibi tot argumentis luce meridiana clarius comprobavi.

Lecta est hæc Epistola coram Regia Societate, in Conventu die 24° Maii 1711 *habito, & ut Exemplar ejus D.* Leibnitio *mitteretur D.* Sloane *Secretario suo mandatum est.*

E-

Epiſtola D. Leibnitii *ad* D. Hans Sloane *M. D.* & *R. S. Secr.*

N° LXXXV.

QUÆ D. *Johannes Keillius* nuper ad Te ſcripſit, candorem meum apertius quam ante oppugnant: quem ut ego hac ætate, poſt tot documenta vitæ, Apologia defendam, & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum anteactarum cognitore, nec * mandatum habente ab eo cujus intereſt, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens æquuſque probabit.

Quæ ille de meo rem cognoſcendi modo ſuſpicatur, haud ſatis exercitatus artis Inveniendi arbiter, ipſius quidem docendi cauſa non eſt cur refellam: ſed norunt † amici quam longe alio & ad alia proficuo itinere proceſſerim. Fruſtra ad Exemplum Actorum Lipſienſium provocat, ut ſua dicta excuſet; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potius paſſim ‡ ſuum cuique tributum. Ego quoque & amici aliquoties oſtendimus libenter a nobis credi, illuſtrem *Fluxionum* Autorem per ſe ad ſimilia noſtris fundamenta perveniſſe. Neque eo minus Ego in Inventoris jura venio, quæ etiam *Hugenius*, judex intelligentiſſimus incorruptiſſimuſque, publice ag-

* Quaſi Methodum *Moutoni*, & Series *Brounkeri*, *Walliſii* & *Gregorii* aliorumque Inventa non liceat propriis authoribus, niſi authoritate ab his accepta, aſſerere.

† Si Amici illi ſunt *Germani*, invenit is hanc Methodum poſt reditum ſuum in *Germaniam*.

‡ Scripſerat *Keillius* in hæc verba. *Hac ut ſcriberem impulerunt Actorum Lipſienſium Editores, qui in ea quam exhibent operis* Newtoniani *de Fluxionibus ſeu Quadraturis Enarratione, diſerte affirmant* D. Leibnitium *fuiſſe iſtius Methodi Inventorem, &* Newtonum *aiunt pro Differentiis* Leibnitianis *Fluxiones adhibere ſemperque adhibuiſſe.* *Leibnitius* Editores hic palam defendit contra *Keillium*, quaſi ſuum cuique reddidiſſent.

agnovit: in quibus tamen mihi vendicandis * no properavi, sed inventum ‡ plusquam nonum in an num pressi, ut nemo me præcucurrisse queri po sit.

Itaque vestræ æquitati committo, annon coe cendæ sint vanæ & injustæ vociferationes, qu || ipsi *Newtono*, Viro insigni & gestorum optime co scio, improbari arbitror: ejusque Sententiæ su libenter daturum Indicia mihi persuadeo.

VALE.

Dabam *Hannoveræ*

29 *Decemb.* 1711

* In Epistola *Aug.* 27. 1676, properavit se coinventorem Method Serierum proponere. In Epistola *Junii* 21. 1677, properavit Metho dum ut suam describere, de qua *Newtonus* tractatum ante annos quin que scripserat. In Schedis tribus anno 1689 impressis, properavi Propositiones principales *Principiorum Philosophiæ* ad Calculum suum revocatas in lucem edere, ut in Inventoris jura veniret.

‡ Probandum est.

|| *Newtonus* & *Leibnitius* nec sunt idonei Judices nec Testes. E monumentis antiquis judicium ferendum est.

Cum D. *Leibnitius* a D. *Keill* ut homine novo ad Societatem Regiam provocaret, Societas jussit monumenta antiquiora consuli, & Sociis aliquot qui his examinandis aptiores viderentur in mandatis dedit, ut in hanc rem inquirerent; & quæ in scriptis antiquis invenirent ad se referrent, una cum eorum Sententia. Et Arbitrorum Consessus collectionem ex Epistolis & aliis MSS. supra impressam ad Societatem retulerunt, una cum eorum Sententia sequente. N° LXXXVI.

WE have consulted the Letters and Letter-books in the Custody of the Royal Society, and those found among the Papers of Mr. John Collins, *dated between the Years* 1669 *and* 1677 *inclusive; and shewed them to such as knew and avouched the Hands of Mr.* Barrow, *Mr.* Collins, *Mr.* Oldenburg *and Mr.* Leibnitz; *and compar'd those of Mr.* Gregory *with one another, and with Copies of some of them taken in the Hand of Mr.* Collins; *and have extracted from them what relates to the Matter referr'd to us; all which Extracts herewith deliver'd to you, we believe to be genuine and authentick: And by these Letters and Papers we find,*

I. *That*

Literas & Literarum Apographa tam quæ in Archivis Regiæ Societatis, quam quæ inter Chartas D. *Joannis Collinii* asservantur, & inter Annos 1669 & 1677 datæ sunt, inspeximus; & ex his, quæ D. *Barrovii*, D. *Collinii*, D. *Oldenburgi* & D. *Leibnitii* nomen ferebant, ex fide aliquorum qui eorum autographa probe noverant, ipsorum esse certo didicimus. Literas autem quæ *Gregorium* præ se ferebant auctorem, ipsius esse cognovimus fide *Collinii*, qui nonnullas earum *Gregorio* assignatas manu sua exscripserat. Ex his omnibus excerpsimus quæcunque ad rem nobis commissam pertinere videbantur; atque illa excerpta quæ una cum ipsis literis jam vobis traduntur, fideliter & accurate facta esse comperimus. Ex his autem Literis chartisque nobis constat,

R I. D.

I. *That Mr.* Leibnitz *was in* London *in the beginning of the Year* 1673, *and went thence in or about* March *to* Paris, *where he kept a Correspondence with Mr.* Collins *by means of Mr.* Oldenburg, *till about* September 1676, *and then return'd by* London *and* Amsterdam *to* Hannover: *And that Mr.* Collins *was very free in communicating to able Mathematicians what he had receiv'd from Mr.* Newton *and Mr.* Gregory.

II. *That when Mr.* Leibnitz *was the first time in* London, *he contended for the Invention of another* Differential Method *properly so call'd; and notwithstanding that he was shewn by Dr.* Pell *that it was* Mouton's *Method, persisted in maintaining it to be his own Invention, by reason that he had found it by himself, without knowing what* Mouton *had done before, and had much improved it. And we find no mention of his having any other* Differential Method *than* Mouton's, *before his Letter of the 21st of* June 1677, *which was a Year after a Copy of Mr.* Newton's *Letter, of the 10th of* December 1672, *had been sent to* Paris *to be communicated to him; and above four Years after Mr.* Collins *began to communicate that Letter to his Corre-*

spon-

I. D. *Leibnitium* anno ineunte 1673 *Londini* fuisse, unde Men
Martio vel circiter *Parisios* adiit, ubi Literarum commercium habu
cum D. *Collinio* intercedente *Oldenburgo*, usque in Mensem *Septem*
brem 1676. Deinde per *Londinum* & *Amstelodamum Hannoveri*
reversum esse. D. autem *Collinium* Matheseos peritis ea quæ a D.
Newtono & *Gregorio* acceperat lubentissime communicasse.

II. D. *Leibnitium*, cum prima vice *Londinum* adiit, Methodi c
jusdam Differentialis, proprie sic dictæ, se Inventorem perhibuis
Et etiamsi D. *Pellius* ipsi monstraverat eandem anteà à D. *Moutono*
surpatam fuisse, haud tamen sibi Inventoris jura asserere destituis
cum quia proprio ut aiebat marte sua illa invenisset, nondum visis
quæ *Moutonus* prius ediderat, tum quia plurima adjecisset. Neq
usquam mentionem reperimus factam alterius Methodi ejus Di
rentialis præter istam *Moutoni*, ante Literas ejus 21 *Junii* 1677
tas; hoc est, Anno integro postquam D. *Newtoni* Epistola, 10 *Dece*
bris 1672 scripta, *Parisios* ipsi communicanda transmissa fuit; & q

d

spondents; in which Letter the Method of Fluxions *was sufficiently describ'd to any intelligent Person.*

III. *That by Mr.* Newton's *Letter of the* 13*th of* June 1676 *it appears, that he had the Method of* Fluxions *above five Years before the writing of that Letter. And by his* Analysis per Æquationes numero Terminorum Infinitas, *communicated by Dr.* Barrow *to Mr.* Collins *in* July 1669, *we find that he had invented the Method before that time.*

IV. *That the* Differential Method *is one and the same with the* Method *of* Fluxions, *excepting the Name and Mode of Notation; Mr.* Leibnitz *calling those Quantities* Differences, *which Mr.* Newton *calls* Moments *or* Fluxions; *and marking them with the Letter* d, *a Mark not used by Mr.* Newton. *And therefore we take the proper Question to be, not who invented this or that Method, but who was the first Inventor of* the Method. *And we believe that those who have reputed Mr.* Leibnitz *the first Inventor, knew little or nothing of his Correspondence with Mr.* Collins *and Mr.* Oldenburg *long before; nor of Mr.* Newton's *having that Method above* Fif-

driennio postquam D. *Collinius* eandem Epistolam cum Amicis communicare cœpit. In hac autem Epistola Methodus Fluxionum idoneo harum rerum cognitori evidenter satis describitur.

III. Ex Literis D. *Newtoni* 13 *Junii* 1676 datis, manifestum est Fluxionum Methodum ipsi innotuisse, quinquennio prius quam Epistolam illam scriberet. Et ex *Analysi* ejus *per Æquationes numero Terminorum Infinitas*, quam D. *Barrovius* cum D. *Collinio* Mense *Julio* Anni 1669 communicavit, constat illum etiam ante illud tempus eandem excogitasse.

IV. *Methodus Differentialis* una eademque est cum *Methodo Fluxionum*, si Nomen & Notationis modum exceperis. D. *Leibnitius* enim eas quantitates *Differentias* appellat quas D. *Newtonus Momenta* vel *Fluxiones*; easque nota literæ [d] designat, quam non adhibet D. *Newtonus*. Rem proinde de qua agimus hanc autumamus esse; non uter hanc uter illam Methodum invenerit; sed uter Methodum ipsam, quæ unica est, prior invenerit. Simul illos qui D. *Leibnitium* pro Inventore primo habuere, de eo quod inter illum & *D. Collinium* olim intercesserat commercio parum aut nihil rescivisse opinamur;

 neque

Fifteen Years before Mr. Leibnitz *began to publish it in the* Acta Eruditorum *of* Leipsick.

For which Reasons, we reckon Mr. Newton *the first Inventor; and are of Opinion, that Mr.* Keill, *in asserting the same, has been no ways injurious to Mr.* Leibnitz. *And we submit to the Judgment of the Society, whether the Extract and Papers now presented to you, together with what is extant to the same purpose in Dr.* Wallis's *third Volume, may not deserve to be made Publick.*

neque intellexisse *D. Newtonum* eadem Methodo usum esse, quindecim prius annos quam *D. Leibnitius* eam in Actis Eruditorum *Lipsiæ* evulgare cœpit.

Quibus perpensis, *D. Newtonum* primum esse hujus Methodi Inventorem arbitramur; atque adeo *D. Keillium*, eandem illi asserendo, nullo modo *D. Leibnitium* calumnia aut injuria affecisse. Judicio autem Societatis permittimus, utrumne Excerpta Literarum, reliquæque chartæ his subnexæ, una cum iis quæ extant in tertio Volumine Operum *D. Wallisii* huc spectantibus, simul imprimi & in publicum prodire mereantur.

His autem Die Aprilis 24° 1712 *acceptis, Societas Regia collectionem Epistolarum & MSS*torum, *& Sententiam Consessus imprimi jussit; ut & quicquid amplius ad hanc Historiam elucidandam idoneum in Actis Eruditorum occurreret.*

APPENDIX.

HIS subjungere visum est Judicium Mathematici 7 *Julii* 1713 datum, & charta volante sine nomine Autoris per orbem sparsum.

„ Videtur *Newtonus* occasionem nactus, serierum ‘opus multum promovisse per Extractiones Radi‘cum quas primus in usum adhibuit, & quidem in ‘iis excolendis ut verisimile est ab initio omne su‘um studium posuit, nec credo tunc temporis vel ‘somniavit adhuc de calculo suo fluxionum & flu‘entium, vel de reductione ejus ad generales ope‘rationes Analyticas ad instar Algorithmi vel Re‘gularum Arithmeticarum aut Algebraicarum. E‘jusque meæ conjecturæ [primum] validissimum in‘dicium est, quod de literis *x* vel *y* punctatis, uno, ‘duobus, tribus, &c. punctis superpositis, quas pro ‘*dx*, *ddx*, *d³x*, *dy*, *ddy*, &c. nunc adhibet, in om‘nibus istis Epistolis [Commercii Epistolici, unde ‘argumenta ducere volunt] nec volam, nec vesti‘gium invenias. Imo ne quidem in Principiis Na‘turæ Mathematicis *Newtoni*, ubi calculo suo flu‘xionum utendi tam frequentem habuisset occasio‘nem, ejus vel verbulo fit mentio, aut notam hu‘jusmodi unicam cernere licet, sed omnia fere per ‘lineas figurarum sine certa Analysi ibi peraguntur ‘more non ipsi tantum, sed & *Hugenio*, imo jam ‘antea [in nonnullis] dudum *Torricellio*, *Roberval‘lio*, *Cavallerio*, aliis, usitato. Prima vice hæ lite‘ræ punctatæ comparuerunt in tertio Volumine ‘Operum *Wallisii* multis annis postquam Calculus diffe-

‘ differentialis jam ubique locorum invaluisset. Al-
‘ terum indicium, quo conjicere licet Calculum flu-
‘ xionum non fuisse natum ante Calculum diffe-
‘ rentialem, hoc est, quod veram rationem fluxio-
‘ nes fluxionum capiendi, hoc est differentiandi dif-
‘ ferentialia *Newtonus* nondum cognitam habuerit,
‘ quod patet ex ipsis Principiis Phil. Math. ubi non
‘ tantum incrementum constans ipsius *x*, quod nunc
‘ notaret per *x* punctatum uno puncto, designat per
‘ *o* [more vulgari, qui calculi differentialis com-
‘ moda destruit] sed etiam Regulam circa gradus
‘ ulterioris falsam dedit [quemadmodum ab eminen-
‘ te quodam Mathematico dudum notatum est]
‘ . . . . Saltem apparet *Newtono* rectam
‘ Methodum differentiandi differentialia non inno-
‘ tuisse longo tempore postquam aliis fuisset fami-
‘ liaris.

Hactenus Judicium.

A N-

ANNOTATIO.

HÆC omnia refutantur supra, pag. 7, 8, 9, 10, 11, 12, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 52, 90, 92, 103, 105, 108, 150, 151, 166, 229, 230, 238.

Methodus fluxionum utique non consistit in forma symbolorum. Et *Keilius* hoc notaverat anno 1711 (*pag.* 37, 238.) Pro fluxionibus ipsarum *x*, *y*, *z*, *Newtonus* quandoque ponit easdem literas punctis notatas, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; quandoque easdem forma majuscula X, Y, Z; quandoque literas alias ut *p*, *q*, *r*; quandoque lineas exponentes ut DE, FG, HI, (*pag.* 37.) Et hoc *Newtonus* in hunc usque diem facit, ut videre licet in Libro de Quadraturis, ubi fluxiones in Propositione prima denotantur per literas punctatas, in ultima per Ordinatas Curvarum, in Introductione per alia symbola, dum *Newtonus* ibi Methodum Fluxionum explicat illustratque per exempla (*pag.* 37.) Pro Fluxionibus D. *Leibnitius* nulla habet Symbola. Is Momentorum sive Differentiarum symbola *dx*, *dy*, *dz*, primo cœpit adhibere Anno 1677; *Newtonus* momenta denotabat per rectangula sub fluxionibus & momento *o* cum Analysin suam scriberet, anno scilicet 1669 aut antea. *Leibnitius* symbolis $\int x$, $\int y$, $\int z$ pro summis Ordinatarum usus est jam inde ab Anno 1686: *Newtonus* in Analysi sua eandem rem denotavit inscribendo Ordinatam in Quadrato vel Rectangulo ad hunc modum $\boxed{\frac{aa}{64x}}$. Omnia *Newtoni* Symbola sunt in suo genere prima, & Symbola *Leibnitii* nondum obtinuerunt in Anglia (*pag.* 37, 38.)

In Principiis naturæ Mathematicis *Newtonus* Analytico suo fluxionum calculo utendi non habuit frequentem occasionem. Nam liber ille inventus est quidem per Analysin, at scriptus est per Synthesin more veterum ut oportuit (*pag.* 39.) At Analysis tamen ita elucet per Synthesin illam, ut *Leibnitius* ipse olim agnoverit, *Newtonum* non solum methodo suâ tangentes duxisse, sed majora multo

con-

consecutum, viso demum Libro Principiorum, se satis intellexisse (*pag.* 52) Et in Epistola sua 28 *Maii* 1697 ad *Wallisium* scripta: *Methodum*, inquit, *profundissimi* Newtoni *cognatam esse methodo meæ differentiali non tantum animadverti, postquam opus ejus* [Principiorum scilicet,] *& tuum prodiit, sed etiam professus sum in Actis Eruditorum & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo Analyseos Infinitesimalis* (pag. 44) Et alibi de sublimi quadam parte Methodi qua *Newtonus* solidum minimæ resistentiæ invenerat, hæc habet verba. *Quam Methodum ante D.* Newtonum *& me, nullus quod sciam Geometra habuit, uti ante hunc maximi nominis Geometram nemo se habere* PROBAVIT (pag. 34) Et in Epistola ad *Newtonum Hannoveræ* data 7 *Mart.* 1693, ita scripsit: *Mirifice ampliaveras Geomeotriam tuis seriebus, sed edito Principiorum opere ostendisti patere tibi quæ Analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque, notis commodis adhibitis quæ differentias & summas exhibent, Geometriam illam quam transcendentem appello, Analysi quodammodo subjicere, nec res male successit*, (p. 30.) Atque iterum in Responso ad D. *Fatium*, quod habetur in Actis Eruditorum *Maii* 1700, *pag.* 203, *lin.* 21, id fassus est *Leibnitius* (pag. 30.) Sed & Sectiones duas primas Libri secundi Principiorum verbis aliis (absque Symbolis differentialibus) composuit, & subjunxit; *se jam fundamenta Geometrica jecisse, & vias quasdam novas satis antea impeditas aperuisse; Omnia autem respondere suæ Analysi infinitorum, hoc est calculo summarum ac differentiarum* (pag. 41, 42, 43.) Et hoc fuit specimen omnium primum Methodi differentialis quod D. *Leibnitius* circa Problemata subliniora Orbi literario exhibuit.

Literæ punctatæ prima vice comparuerunt, non (ut hic dicitur,) in tertio Volumine Operum *Wallisii* quod prodiit Anno 1699, sed in secundo Volumine operum ejus quod prodiit Anno 1693 (pag. 10, 41.) annis utique duobus antequam fama calculi differentialis ad aures *Wallisii* pervenerit, & annis tribus antequam Marchio Hospitalius Analysin suam infinite parvorum ediderit, qua Calculus differentialis ubique locorum invalescere cæpit. (pag. 26, 31, 32, 40, 41.)

New-

Newtonus nunquam mutavit literam *o* in literam $\dot{x}$ punctatam uno puncto, ſed litera illa *o* uſus eſt in Introductione ad Librum de Quadraturis, & adhuc utitur in eodem ſenſu ac ſub initio, idque maximo cum fructu. Eſt enim *o* ſymbolum unicum quo *Newtonus* utitur pro quantitate infinite parva: At Symbolum $\dot{x}$ quantitatem finitam deſignat (*pag.* 8, 9, 36, 37, 38.)

Methodus Fluxiones omnes capiendi, ſeu differentiandi differentialia, habetur in Propoſitione prima libri de Quadraturis: & eſt veriſſima & optima. Eandem cum exemplis in differentiis primis & ſecundis *Wallisius* edidit in Tomo ſecundo Operum ſuorum anno 1693 ut ſupra, annis ſcilicet tribus antequam Regula *Leibnitii* differentiandi differentialia lucem viderit (*pag.* 10, 40, 41.) Eandem Regulam *Newtonus* Anno 1686 demonſtravit Synthetice in Lem. II. Lib. II. Princip. (*pag.* 30.) & poſuit in Epiſtola ſua ad *Oldenburgum* 24 *Octob.* 1676, tanquam fundamentum hujus methodi de qua tum ante annos quinque ſcripſerat (*pag.* 8.) Et ſpecimen ejuſdem quoad Tangentes ducendas, poſuit in Epiſtola ſua ad *Collinium* 10 *Decemb.* 1672 (pag. 105.) Et in eadem Epiſtola addidit Problemata de Curvarum curvatura ſeu Geometricarum ſeu Mechanicarum, per eandem methodum ſolvi (*pag.* 105.) Ex quo manifeſtum eſt ſe jam tum ſuam methodum ad ſecunda ac tertia momenta extendiſſe. Cum enim areæ curvarum conſiderantur tanquam fluentes (ut in hac Analyſi fieri ſolet.) Ordinatæ exprimunt fluxiones primas, Tangentes autem datæ ſunt per fluxiones ſecundas, & Curvaturæ per tertias (*pag.* 9.) Et Anno 1669 in Analyſi ſua per ſeries *Newtonus* dixit: *Momentum eſt ſuperficies cum de ſolidis, & linea cum de ſuperficiebus, & punctum cum de lineis agitur*: quod perinde eſt ac ſi dixiſſet: Cum ſolida conſiderantur tanquam fluentia, eorum momenta ſunt ſuperficies, & horum momentorum momenta (vel ſecunda ſolidorum momenta) ſunt lineæ, & horum momenta (ſive tertia ſolidorum momenta) ſunt puncta; adeoque qua ratione momenta prima derivantur a fluentibus, ſecunda derivantur a primis, tertia a ſecundis, & ſic deinceps in infinitum. Et Quomodo momenta prima derivantur a fluentibus, oſtenditur in Analyſi per ſeries inveniendo Ordinatas Curvilinearum ex Areis. (*pag.* 7, 8, 9, 10, 11, 12, 92.)

In eadem Analysi *Newtonus* posuit secundam Propositionem Libri de Quadraturis (*pag.* 230, *lin.* 13.) dixitque *Curvarum areas & longitudines, id modo fiat, beneficio ejusdem methodi Analyseos exacte & Geometrice determinari.* (p. 90. l. 17.) Et Methodus hæcce *Newtono* innotuit annis aliquot antea testibus *Barrovio* & *Collinio* (pag. 103, lin. 26, 27, 28, 33.) id est Anno 1666 aut antea. Hæc methodus aliquatenus explicatur in Epistola *Newtoni* ad *Oldenburgium* 24 *Octob.* 1676 data, ibique ex Propositione prima Libri de Quadraturis, (illic ænigmatice descripta) consequi dicitur (*pag.* 150, 151.) & in Propositione quinta & sexta Libri illius plenius explicatur; & hæ Propositiones ex Propositionibus quatuor primis Libri ejusdem consequuntur: ideoque Methodus fluxionum quatenus in Propositionibus quinque vel sex primis Libri de Quadraturis exponitur, *Newtono* innotuit Anno 1666 aut antea, testibus *Barrovio* & *Collinio*; ut & teste etiam *Wallisio* (pag. 32.) Sed & Marchio Hospitalius pro *Newtono* testis est, qui utique dixit Librum Principiorum Philosophiæ fere totum esse ex hoc calculo (*pag.* 30.) & *Leibnitium* in Methodum differentialem incidisse efficiendo ut Methodus tangentium *Barrovii* non hæreret ad radicales (*pag.* 26, 27, 28.) *Newtonus* enim per Epistolas 10 *Decem.* 1672, & 24 *Octob.* 1676. *Leibnitium* admonuit se hoc antea assecutum esse (*pag.* 105, 166)

Ex iis etiam quæ in Epistola ad *Oldenburgum* 24 *Octob.* 1676 data de Tabulis figurarum curvilinearum in Scholio Propositionis decimæ Libri de Quadraturis positarum dicuntur, liquet Methodum fluxionum & momentorum quatenus in decem primis Libri illius Propositionibus habetur, diu ante annum 1676 *Newtono* innotuisse (*pag.* 230.) Id quod etiam colligi potest ex Corol. 2 Prop. X. Libri de Quadraturis, quod utique in Epistola *Newtoni* ad *Collinium* *Nov.* 8, 1676 data, & Anno 1711 a *Jonesio* edita, descriptum habetur.

FINIS.

ERRATA.

Pag. 19. lin. 16. lege, *In eadem utique Epiſtola.*
Pag. 22. lin. 6. lege, *Anno* 1675.
Pag 26. lin. 7. lege, *oblitumque jam fuiſſe.*
Ib. lin. 27. lege, *quæ ſponte.*
Pag. 31. lin. 22. lege, *Præfatione.*
Ib. lin. 23. lege, *editi.*
Ib. l. 32. lege, *interſeruerim.*
Pag. 36. lin. 34, 35, 36, & Pag. 37. lin. 4, 6, 9, 10, pro *x* ſcribe $\dot{x}$.
Pag. 37. lin. 11. pro *xo* ſcribe $\dot{x}o$.
Ib. lin. 19. lege *areas.*
Pag. 46. lin. 30. lege, *quæque etiam adhuc.*
Pag. 47. lin. 18. pro *aliam* lege *etiam.*
Pag. 52. lin. 4. pro *omnino nullus*, lege *jus omnino nullum.*
Pag. 53. pro *prædicaverat* lege *explicaverat.*
Pag. 54. lin. 28. lege 1676, *ſe tum ante annos quinque quo quietius.*
Pag. 142. lin. 9. pro 1679 lege 1676.

Lately Publish'd, neatly Printed in Twelves.

ΟΜΗΡΟΥ ΙΛΙΑΣ. Adjicitur in Calcem Interpretatio Latina. Scholis in Angliâ Celeberrimis; Etonensi, Westmonasteriensi Regiis; Wintoniensi, Carthusianæ, Paulinæ & Mercatorum scissorum, hæc Homeri Editio, in Earum præcipuè Usum Concinnata, humillimè Offertur Dedicaturque.

ΤΗΣ ΚΑΙΝΗΣ ΔΙΑΘΗΚΗΣ ΑΠΑΝΤΑ. Novum Testamentum. Græcè.

P. Virgilii Maronis Opera.

Q. Horatii Flacci Opera.

Catulli, Tibulli, & Propertii Opera.

P. Ovidii Nasonis Opera, tribus tomis comprehensa.

Publii Terentii Carthaginiensis Afri Comœdiæ Sex.

Titi Lucretii de Rerum Naturâ Libri Sex.

M. Annæi Lucani Pharsalia: Sive de Bello Civili inter Cæsarem & Pompeium Libri Decem.

D. Junii Juvenalis & Auli Persii Flacci Satyræ.

Phædri Aug. Liberti Fabularum Æsopicarum Libri Quinque; item Fabulæ quædam ex MS. veteri à Marquardo Guido descriptæ; cum Indice Vocum & Locutionum. Appendicis loco adjiciuntur Fabulæ Græcæ quædam & Latinæ ex variis Authoribus collectæ; quas claudit Avieni Æsopicarum Fabularum Liber Unicus.

M. Valerii Martialis Epigrammata.

C. Julii Cæsaris & A. Hirtii de Rebus à C. Julio Cæsare gestis Commentarii: Cum C. Jul. Cæsaris fragmentis.

Cornelii Nepotis excellentium Imperatorum Vitæ.

Lucius Annæus Florus. Cui subjungitur Lucii Ampelii Liber Memorialis.

Caii Sallustii quæ extant.

Velleii Paterculi Historiæ Romanæ quæ supersunt.

Justini Historiarum ex Trogo Pompeio Libri XLIV.

Q. Curtius Rufus de Rebus Gestis Alexandri Magni.

CUM PRIVILEGIO.

N. B. *This Collection (both of the* GREEK *and* LATIN *Authors) will be Continu'd with all Convenient Speed.*

Also in Twelves.

Conciones & Orationes ex Historicis Latinis excerptæ.

Christus Patiens. Rapini Carmen Heroicum.

Musarum Anglicanarum analecta: sive Poëmata quædam melioris notæ, seu hactenus Inedita, seu sparsim Edita, in duo Volumina congesta. Editio Quarta, Prioribus auctior.

Johannis Bonefonii Arverni Carmina,

In Octavo.

C. Julii Cæsaris quæ extant, accuratissime cum Libris Editis & MSS optimis Collata, Recognita & Correcta. Accesserunt Annotationes Samuelis Clarke, S. T. P. Item Indices Locorum, Rerumque & Verborum, utilissimi. 8vo.

Latina,
giis;
m,

Testa-

rem &

em Fa-
um In-
Fabulæ
clau-

Com-

Memo-

N *Au-*

ris no-
conge-

& MSS
ationes
& Ver-